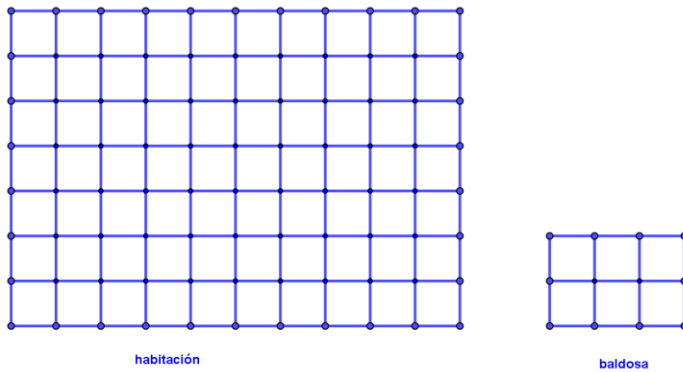


c) Sin necesidad de escribirlos todos, ¿cuántos números de cuatro cifras que suman 10 hay mayores que 1000 y menores que 2000?

d) ¿Cuántos números de esta clase hay en total?

3. RECUBRIMIENTOS CON BALDOSAS

a) Una habitación rectangular 7x10 (7 filas y 10 columnas) **NO** se puede recubrir utilizando baldosas rectangulares 2x3 (2 filas y 3 columnas). Explica por qué.



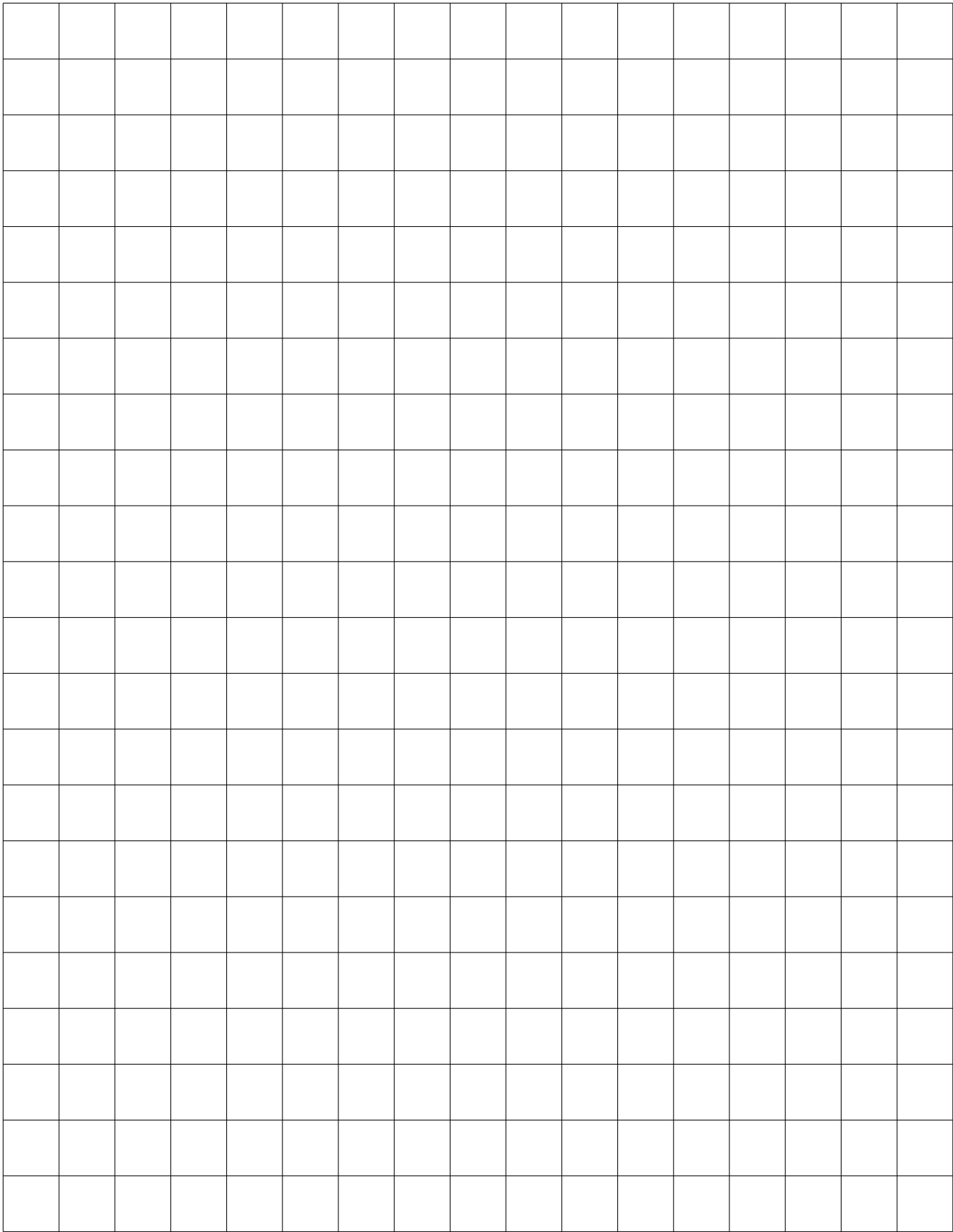
b) Una habitación rectangular 17x28 **NO** se puede recubrir con baldosas 4x7. Explica por qué.

c) Un rectángulo 10x15 **NO** se puede recubrir con baldosas 1x6. Explica por qué.

(Continúa detrás)

d) Un rectángulo 24×14 **SÍ** se puede recubrir con baldosas 3×4 . ¿Por qué? ¿Qué relaciones encuentras entre las dimensiones del rectángulo y las de la baldosa en este caso que no se daban en los casos anteriores?

e) Supongamos que tenemos baldosas 3×4 . Describe las dimensiones de TODAS las habitaciones rectangulares que puedes recubrir con estas baldosas. ¿Qué condiciones deben cumplir el número de filas y de columnas de estas habitaciones?



4. LLEGAR A LA META

Zaida y Andrea están probando un juego nuevo que se plantea en una cuadrícula de 5x5 en la que la fila inferior es la META.

META				

Las reglas del juego son las siguientes:

- El jugador que empieza marca una casilla cualquiera de las de la fila de arriba.
- El otro jugador señala una casilla a la derecha, a la izquierda o abajo (nunca en diagonal) de la marca hecha por el primer jugador.
- A continuación, hace lo mismo el primer jugador y siguen jugando por turnos.
- Nunca se puede marcar una casilla dos veces.
- El jugador que entre primero a la meta gana.

Debes suponer que las dos van colocando las marcas para ganar, es decir, no vamos a tener en cuenta las posibilidades en las que una de las dos se coloca voluntariamente en una casilla que le haga perder el juego.

a) Si Andrea empieza marcando la segunda casilla de la izquierda, ¿es posible que Zaida gane la partida? Justifícalo.

	X			
META				

b) ¿Y si Andrea comienza marcando la esquina superior izquierda? ¿cuáles son las jugadas posibles de Zaida? ¿Podría ganar en este caso?

(Continúa detrás)

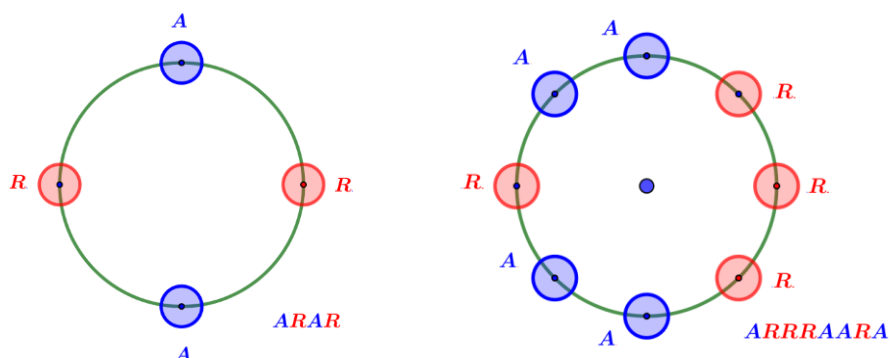
c) ¿Tienen las mismas posibilidades de ganar las dos amigas o existe una manera de ganar siempre?

d) Si la cuadrícula es de 7x7 y Andrea sale de la casilla central de la fila de arriba, ¿puede perder la partida? Justifícalo.

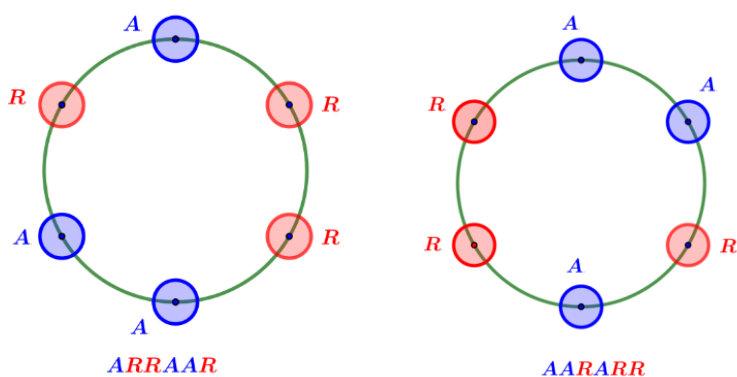
			<i>X</i>			
<i>META</i>						

5. CÍRCULOS DE COLORES

Sobre una mesa circular se desean colocar igual número de Fichas Azules (A) que de Fichas Rojas (R), ordenándolas a partir de la posición superior y siguiendo la orientación horaria. Dos colocaciones se considerarán iguales si una puede ser obtenida mediante la otra por una determinada rotación.



Para describir una colocación que pueda representar a varias similares usaremos para ello, la ordenación alfabética, a la que llamaremos disposición CANÓNICA.



Estas dos configuraciones son iguales pues podemos rotar la primera alrededor del centro de la mesa y obtener la segunda. Así, por ejemplo, la colocación CANÓNICA de *ARRAAR* sería *AARARR*.

a) Para el caso 3 Fichas Azules A y 3 fichas Rojas R, escribe todas las colocaciones CANÓNICAS distintas que se puedan hacer.

(Continúa detrás)

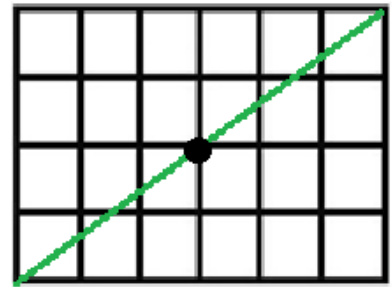
(b) Si tenemos 4 fichas de cada color, escribe todas las colocaciones que representan la misma ordenación que **ARRAARRA**.

(c) Para 4 fichas de cada color, escribe todas las colocaciones CANÓNICAS distintas que se puedan hacer con 4 Fichas A y 4 Fichas R.

(d) Con cinco fichas de cada color, ¿cuántas colocaciones distintas hay?

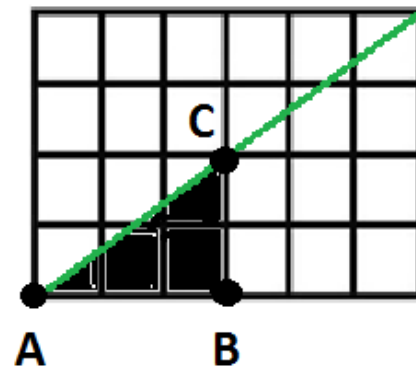
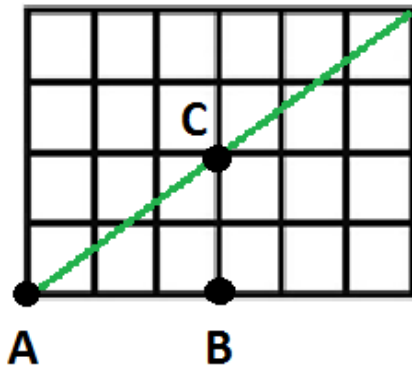
1. TRIÁNGULOS

Fíjate en el siguiente rectángulo de base $m=6\text{ cm}$ y altura $n=4\text{ cm}$ formado por $6 \times 4 = 24$ cuadraditos. Trazamos una línea desde el vértice que está más a la izquierda y más abajo con el vértice que está más a la derecha y más arriba.



Como puedes observar, la línea pasa por **primera vez** por un vértice de uno de los cuadraditos en el punto marcado en negro. Con este punto, que llamaremos C, podemos formar un triángulo rectángulo ABC cuyos vértices son:

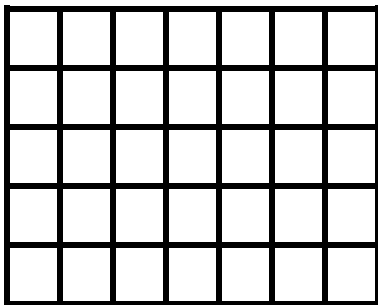
- El punto C.
- El punto A, que resulta ser el vértice del rectángulo que está más a la izquierda y más abajo.
- El punto B, que resulta de intersectar el lado inferior del rectángulo con una línea perpendicular desde C.



Estamos interesados en el área de este triángulo rectángulo.

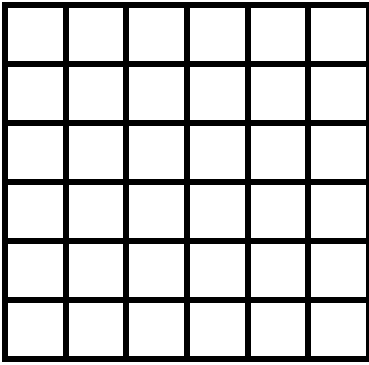
a) ¿Cuánto vale esta área si $m=6$ y $n=4$?

b) ¿Cuál es el área del triángulo si $m=7$ y $n=5$?



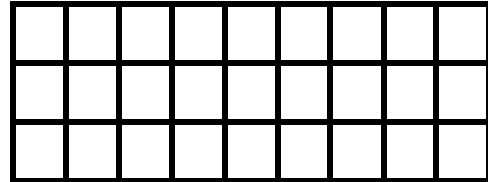
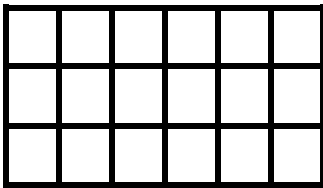
(Continúa detrás)

c) ¿Cuál es el área del triángulo si $m=n$?



d) ¿Sabrías dar varios valores de m y n para los que el área del triángulo sea exactamente la mitad del producto de m por n ?

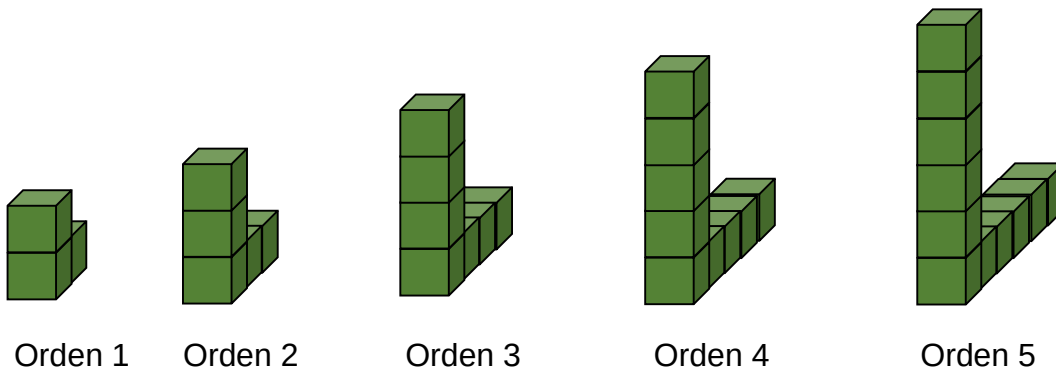
e) ¿Cuál es el área del triángulo si m es el doble que n ? ¿Y si es el triple?



f) ¿Qué crees que ocurre en general? ¿Sabrías dar una fórmula para calcular el área para cualquier valor de m y de n ?

2. TORRES DE CUBOS EN FORMA DE L

Con cubos blancos hacemos construcciones en forma de L, como en la figura, y una vez finalizadas pintamos de color verde las caras que se ven (las que apoyan en el suelo o se adosan a otro cubo no se ven).



- a) Rellena la tabla siguiente en donde la última columna indica las caras pintadas de los primeros órdenes de construcción.

Número de orden n	Total cubos N	Total caras pintadas P
1		
2		
3		
4		
5		

- b) En la construcción de orden 500, ¿cuántos cubos hay y cuántas caras estarán pintadas? ¿Y en la de orden 2019?

(Continúa detrás)

c) Busca una expresión general que dé el número de caras pintadas para una construcción de orden n cualquiera.

d) ¿Es posible una construcción que tenga 5245 cubos? ¿Y una que tenga 2441 caras pintadas? Indicar qué tipo de números pueden expresar el número de caras pintadas de una construcción.

3. REGALO SORPRESA

Dos chicas Ana y Belén y dos chicos Antonio y Bruno participan en un juego: cada chica escribe en un papel el nombre de un chico al que le va a dar un regalo y cada chico escribe en otro papel el nombre de una chica a la que le va a dar un regalo.

Para simplificar la notación vamos a designar a las chicas con la inicial de su nombre en mayúscula y a los chicos con la inicial de su nombre en minúscula. Por ejemplo, una posibilidad sería la que se muestra en la figura de la derecha: en este ejemplo miramos las columnas y comprobamos que

A	a
B	a
a	A
b	A

A escribe **a**, **B** escribe **a**, **a** escribe **A** y **b** escribe **A**.

Fíjate que en este caso Antonio (**a**) recibe dos regalos pero Bruno (**b**) ninguno y Ana (**A**) recibe dos regalos y Belén (**B**) ninguno.

- a)** ¿Podrías explicar cuántas posibilidades hay en total?
- b)** ¿Cuántas posibilidades hay de manera que todo el mundo reciba un regalo? Tened en cuenta que “**A** regala a **b**” es una posibilidad distinta de que “**A** regale a **a**”.
- c)** Y ahora contad cuántas posibilidades hay evitando que dos personas se intercambien regalos, es decir, si **A** regala a **b**, entonces **b** no regala a **A**.

(Continúa detrás)

Ahora hay tres chicas, Ana, Belén y Celia y tres chicos Antonio, Bruno y Carlos que juegan a lo mismo. En este caso el número de posibilidades es mucho mayor. No te pongas a escribirlas todas porque te vas a aburrir. Observa bien el caso anterior y contesta las siguientes preguntas:

- d)** En este caso ¿cuántas posibilidades hay en total?

- e)** Si cada persona recibe un regalo y no puede haber dos personas que intercambien regalos entre las dos, ¿cuántas posibilidades hay?

- f)** En el caso de que hubiera cuatro chicas, Ana, Belén, Celia y Diana y cuatro chicos Antonio, Bruno, Carlos y Daniel que juegan a lo mismo, si todos reciben un regalo y dos personas no pueden intercambiarse el regalo entre ellas, ¿cuántas posibilidades hay? Explica cómo has llegado a la solución.

4. CINCO NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

- a) Elegimos dos números enteros positivos distintos, por ejemplo 4 y 7 y a partir de aquí generamos estos cinco números

4,7,10,13,16.

Observa que la suma de los 5 números es un múltiplo de cinco y que si hacemos todas las sumas posibles de dos en dos hay tres resultados repetidos ¿Cuáles son estos resultados repetidos?



- b) Elige otros 5 números distintos de los anteriores que cumplan que si se suman de dos en dos sólo hay 7 resultados diferentes.
- c) Imagina que ahora eliges cinco números distintos: $a < b < c < d < e$. Escribe todas las sumas posibles y comprueba que hay siete sumas que claramente puedes ordenar de menor a mayor.

(Continúa detrás)

- d) Si sólo puede haber siete sumas diferentes, ¿qué sumas tienen que estar repetidas?

- e)** Comprueba que si elegimos 5 números positivos distintos $a < b < c < d < e$ de manera que si los sumamos de dos en dos y sólo tenemos 7 resultados distintos, entonces $a + b + c + d + e$ siempre es múltiplo de cinco. Explica cómo has llegado al resultado.

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático



**Prueba de selección
4 de junio de 2005**

Nombre:
Apellidos:
Fecha de nacimiento:
Teléfonos:

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

En primer lugar debes ojear todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

Queremos conocer no solamente tus soluciones, sino sobre todo tus propios caminos hacia la solución.

Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.

Al final nos debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas deberías tratar de describírnoslas de la manera más clara posible. Para ello casi siempre nos bastará que des un par de indicaciones breves. También nos interesan las soluciones parciales a las tareas.

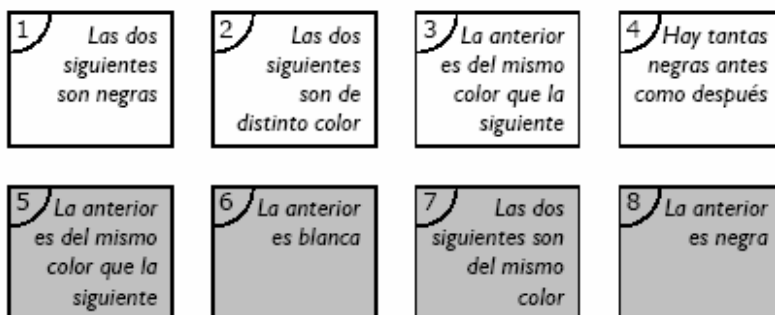
Tienes dos horas y media en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: el máximo tiempo que debes utilizar para un ejercicio es de 30 minutos.

Te deseamos mucho éxito.



Problema nº 1 (Tarjetas)

Las tarjetas 1, 2, 3 y 4 son blancas; las tarjetas 5, 6, 7 y 8 son negras.



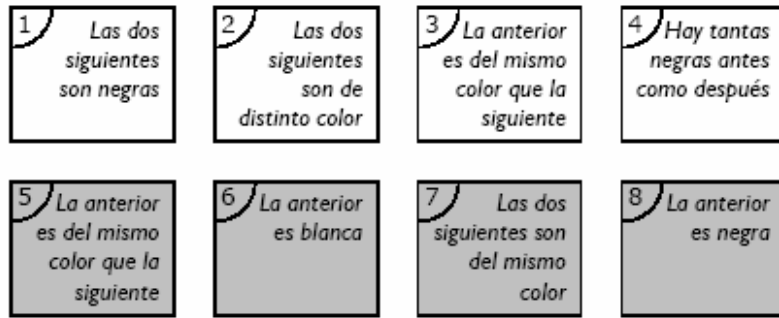
El objetivo final es ordenarlas para que todas las frases resulten verdaderas. Pero antes contesta a las siguientes preguntas.

a) ¿Qué tarjetas se pueden colocar en primer lugar?

b) ¿Qué tarjetas se pueden colocar en último lugar?

c) ¿En qué posiciones puede colocarse la tarjeta 4?

(Sigue a la vuelta)



d) Finalmente, ordena las tarjetas una detrás de otra para que todas las frases resulten verdaderas.



Problema nº 2 (Tablero)

Tenemos un tablero cuadrado y en cada casilla anotamos un número siguiendo estas instrucciones: el número que escribimos es el menor de los números que indican la fila y la columna de la casilla. La figura que tienes a continuación te da un ejemplo en el caso de un tablero 3×3 .

	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

- a)** Tenemos un tablero cuadrado de 5×5 (25 casillas). ¿Cuál será la suma de todos los números una vez que hayamos rellenado todo el tablero con la condición que se ha indicado? **Explica** una manera de calcular la suma anterior, sin necesidad de sumar uno a uno todos los números.

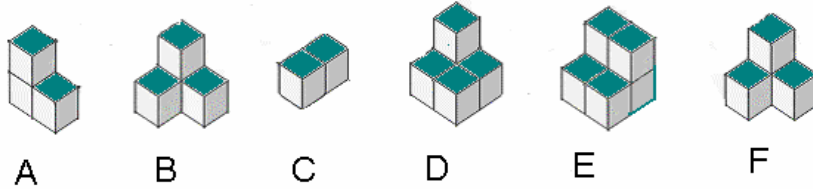
(Sigue a la vuelta)

b) Ahora tenemos un tablero de 10×10 (100 casillas). Si lo rellenamos siguiendo las instrucciones ya comentadas, ¿cuál será la suma de todos los números anotados? Explica cómo lo has calculado.

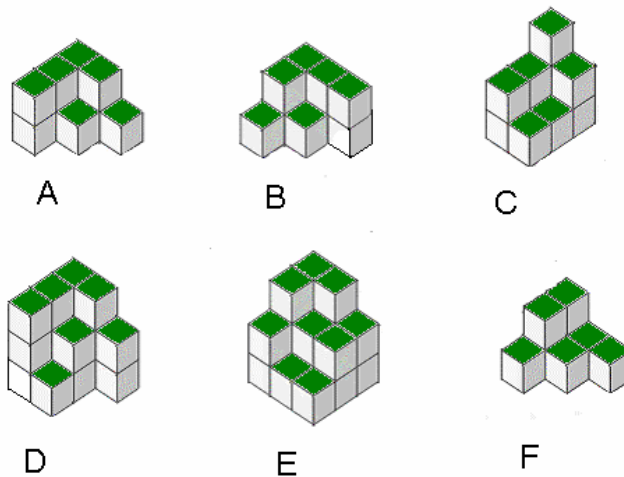
c) En el mismo tablero de 10×10 estudia cuál sería la suma si, en lugar de poner el menor de los números que indican la fila y la columna de la casilla, pusiésemos el mayor.

Problema nº 3 (Cubos)

a) Observa las seis piezas siguientes. Elige las parejas de bloques que encajen formando un cubo completo de $2 \times 2 \times 2$.

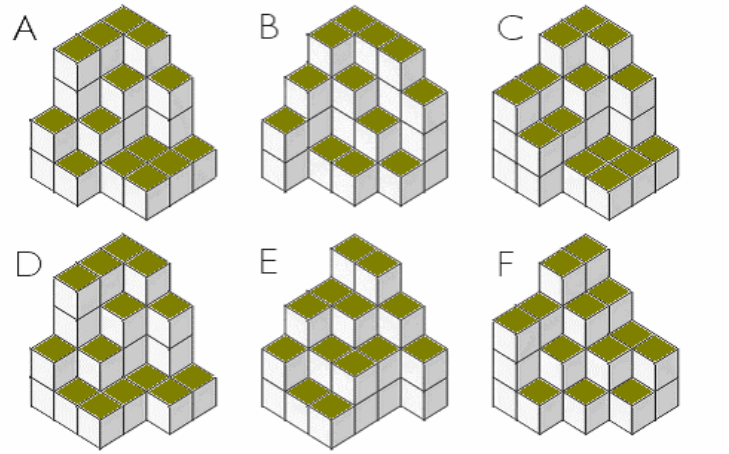


b) Cuenta el número de cubos que hay en cada uno de los siguientes bloques. ¿Cuáles son los dos bloques que hay que unir para formar un cubo completo de $3 \times 3 \times 3$? En cada uno de ellos, numera con 1, 2 y 3 tres cuadrados que queden pegados al encajar los bloques. Explica cómo has encontrado la solución.



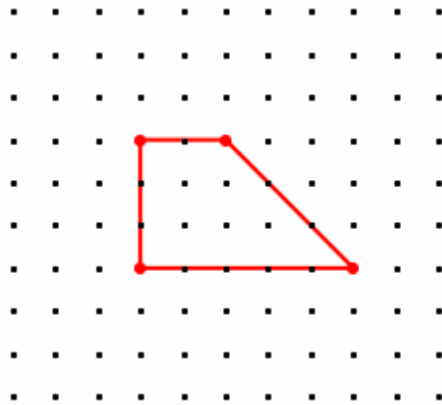
(Sigue a la vuelta)

c) Contesta a las mismas preguntas que en el apartado **b)** para los bloques siguientes en el caso de un cubo completo de $4 \times 4 \times 4$. No te olvides de explicar cómo has encontrado la solución.



Problema nº 4 (Números trapeciales)

En este problema consideraremos unos trapecios muy especiales. Tienen que tener dos ángulos rectos y un ángulo de 45° y además sus vértices han de ser puntos de una cuadrícula. Mira el trapecio de la figura: como encierra 18 puntos, contando los que hay sobre los lados, diremos que 18 es un “**número trapecial**”.



(En la carpeta tienes cuadrículas para practicar)

a) Haz un dibujo que muestre que 35 es un número trapecial.

b) Dibuja todos los trapecios que tienen 18 como número trapecial y justifica que no hay más que los que dibujas.

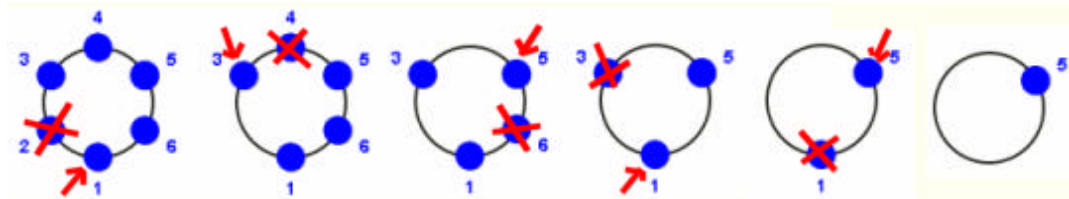
(Sigue a la vuelta)

c) Explica por qué cualquier número impar mayor que 3 es un número trapecial.

d) Encuentra razonadamente todos los números entre 4 y 50 que **no** sean números trapeciales.

Problema n° 5 (Fichas saltarinas)

Se colocan 6 fichas en círculo y se numeran del 1 al 6 consecutivamente. Ahora, en el sentido de numeración, voy dejando una ficha y quitando la siguiente. Empiezo dejando la ficha 1 y quitando la 2. El proceso continúa hasta que sólo queda una ficha. En la figura vemos que al final del proceso la ficha final es la número 5.



a) Haz tú lo mismo con 8 fichas en círculo. ¿Qué ficha queda al final?

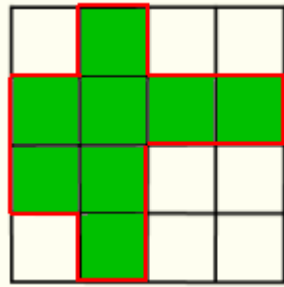
b) Si comenzamos con 16 fichas, ¿qué ficha queda al final?

(Sigue a la vuelta)

c) Los números 8 y 16 son potencias de 2. También el número $1024 = 2^{10}$ es una potencia de 2. ¿Sabrías decirnos, con un razonamiento convincente, qué ficha quedaría al final si comienzas con un círculo de 1024 fichas?

d) Ahora tienes $1026 = 2^{10} + 2$ fichas. ¿Qué ficha quedaría al final? Indícanos las razones de tu contestación.

Problema n° 6 (Perímetro de regiones coloreadas)

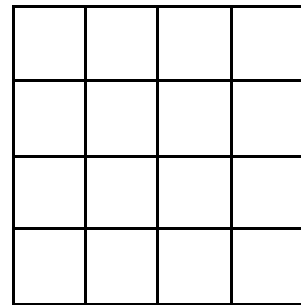
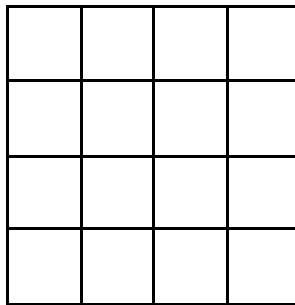
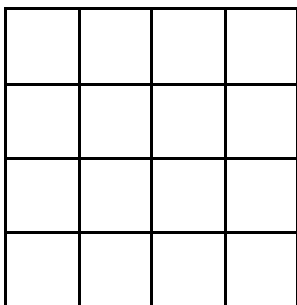


El área de la región coloreada de la cuadrícula es 200 cm^2 .

a) ¿Cuál es el perímetro de la región coloreada?

b) ¿Crees que si cambias de sitio las casillas coloreadas de tal forma que se dibuje otra región con la condición de que cada pieza tenga como mínimo un lado en común con otra pieza (que no queden sueltas) y que toda la región esté dentro de la cuadrícula, podrás encontrar un perímetro diferente? Pon un ejemplo.

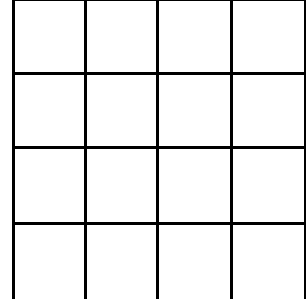
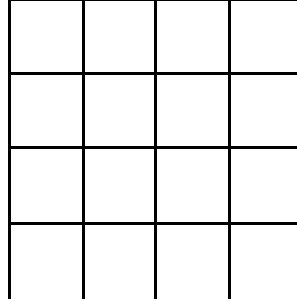
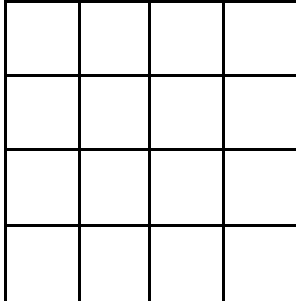
(Cuadrículas para practicar)



(Sigue a la vuelta)

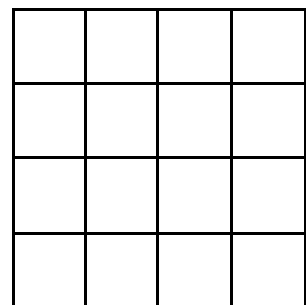
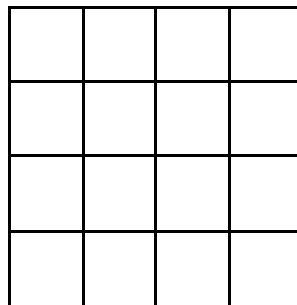
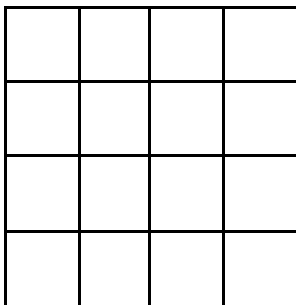
c) Estudia cuál es el mayor perímetro que puedes conseguir en la situación anterior. ¿Cuál será el menor perímetro posible?

(Cuadrículas para practicar)



d) ¿Cuántas casillas de la cuadrícula 4´4 deberías colorear, y en qué posición, para conseguir el perímetro máximo de una región coloreada dentro de la cuadrícula?

(Cuadrículas para practicar)



PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático



Prueba de selección
3 de junio de 2006

Nombre:.....
Apellidos:.....
Fecha de nacimiento:.....
Teléfonos:.....

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

Queremos conocer no solamente tus soluciones, sino sobre todo tus propios caminos hacia la solución.

Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.

Al final nos debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas, deberías tratar de describírnoslas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

- ☐ A través de tu colegio,
- ☐ A través del Concurso de Primavera,
- ☐ A través de otros medios.

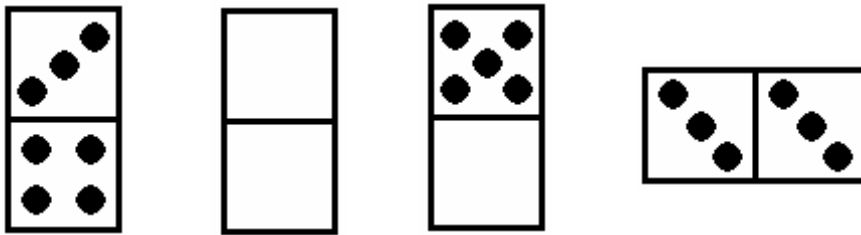
Tienes dos horas en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: máximo tiempo para un ejercicio 30 minutos.

Te deseamos mucho éxito.



Problema nº 1. Dominó/Triminó

Las fichas del juego del dominó son rectángulos formados a partir de la unión de dos cuadrados. En esos cuadrados hay puntos que pueden variar de cero a seis. Así tenemos la ficha 3-4 (o 4-3 que es la misma), la 0-0 (conocida como blanca doble) la 0-5, la 3-3 ...

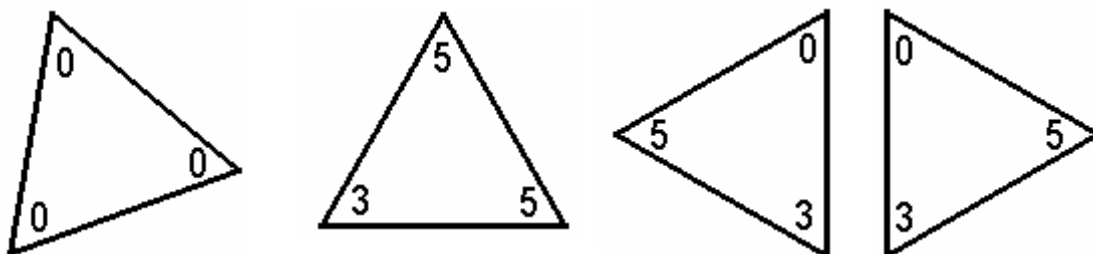


Un juego completo de dominó, donde no hay piezas repetidas, se compone de 28 fichas

- a) Si quisiéramos hacer un dominó en el que los puntos de cada cuadrado sólo fueran de 0 a 4, ¿cuántas fichas tendría el juego completo?

- b) ¿Y si los puntos fueran de 0 a 10?

El juego del triminó es parecido al del dominó, las fichas son triángulos equiláteros y cada una lleva tres valores (números en vez de puntos), uno en cada vértice, tal como podéis ver en los ejemplos siguientes:

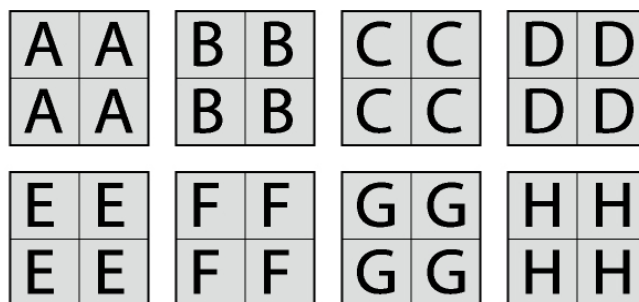


(Dos fichas diferentes)

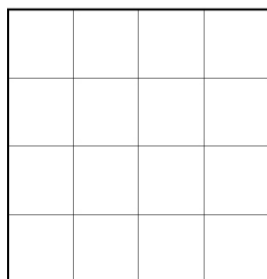
- c) Dos fichas son iguales si tienen los mismos tres números y están colocados en el mismo orden circular ¿Cuántas fichas diferentes hay en un triminó que tiene en los vértices números de 0 a 5.

Problema nº 2: El juego de los cartones

Ocho alumnos de una clase, Aurora, Berta, Clara, David, Ester, Fernando, Gloria y Helia tienen ocho cartones cuadrados, todos de la misma medida, donde han escrito sus iniciales (cuatro iniciales en cada cartón.)

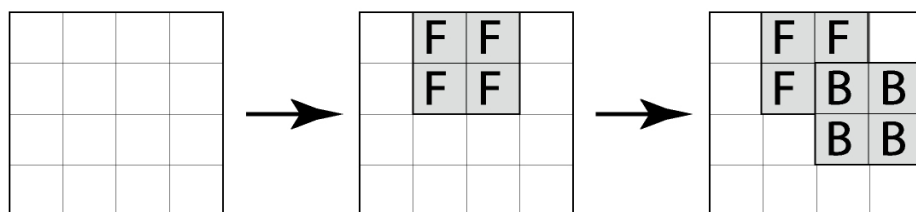


Queremos hacer un juego que consiste en colocar sucesivamente los cartones cuadrados en un tablero, también cuadrado, que tiene la longitud del lado doble de la de los cartones:

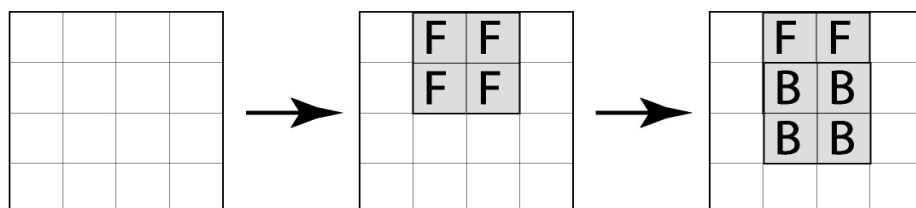


Cada cartón se ha de colocar con los lados paralelos a los del tablero y se ha de hacer de manera que cada cartón que se coloca tape parcialmente el anterior (el segundo ha de tapar una parte del primero, el tercero una parte del segundo – y también si se quiere una parte del primero –, el cuarto una parte del tercero y si se quiere de los anteriores, etc...)

Una posible sucesión de jugadas podría ser ésta:



Y otra sucesión posible es ésta:



Después de haber hecho las ocho jugadas el tablero presenta este aspecto:

H	G	D	D
H	B	B	D
A	B	B	C
F	F	E	C

- a) De los ocho alumnos, ¿quién fue el último en jugar?
- b) Y ¿quién fue el penúltimo?
- c) ¿Cuál ha sido el orden en el que se han hecho las jugadas?
- d) ¿Crees que sin jugar las 8 personas, pero siguiendo las instrucciones del juego, se podría llegar a cubrir todo el tablero? ¿Con cuántas jugadas? Da un ejemplo, indica el orden en el que juegan y di cómo queda el tablero.

Problema nº 3: Poliamantes

Un poliamante es una figura formada por varios triángulos equiláteros, todos con lados de la misma longitud, unidos por uno de sus lados. Por ejemplo, con dos triángulos equiláteros se puede formar una sola figura, el **diamante**, y con tres triángulos equiláteros se puede formar también una sola figura, el **triamante**. Varias representaciones, todas iguales, de ambas aparecen en las Figuras 1 y 2 respectivamente.

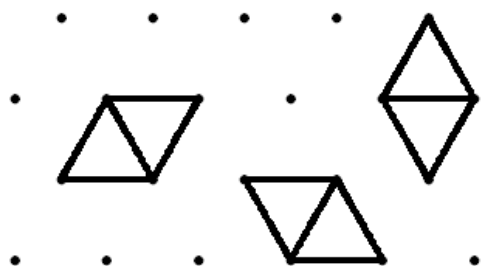


Figura 1: Diamante

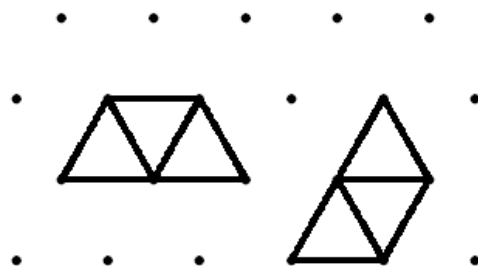
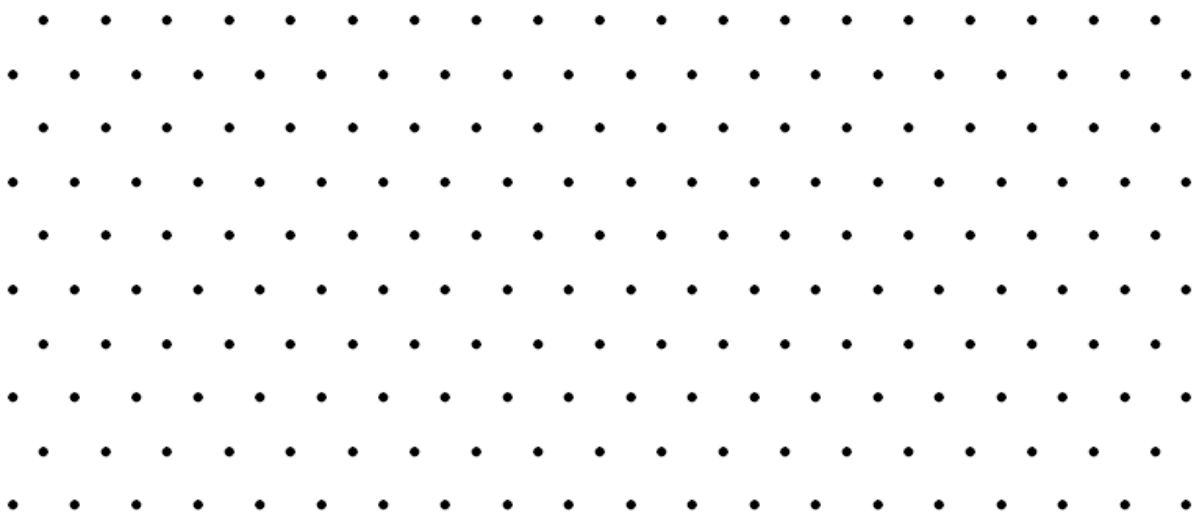


Figura 2: Triamante

Contesta a las siguientes preguntas y justifica las respuestas:

- a) ¿Cuántas figuras diferentes podemos formar con cuatro triángulos equiláteros? Las llamaremos los **tetramantes**. Dibuja cada uno de ellos en la trama de puntos que te hemos proporcionado. ¿Tienen todos la misma superficie?



- b) Si el lado del triángulo equilátero mide 1, calcula el perímetro de cada uno de los tetramantes. ¿Cuál o cuáles de ellos son el desarrollo de una pirámide de base triangular?

- c) Varios tetramantes se han combinado para formar la Figura 3. Halla una descomposición de los tetramantes con la que se obtiene esa figura.

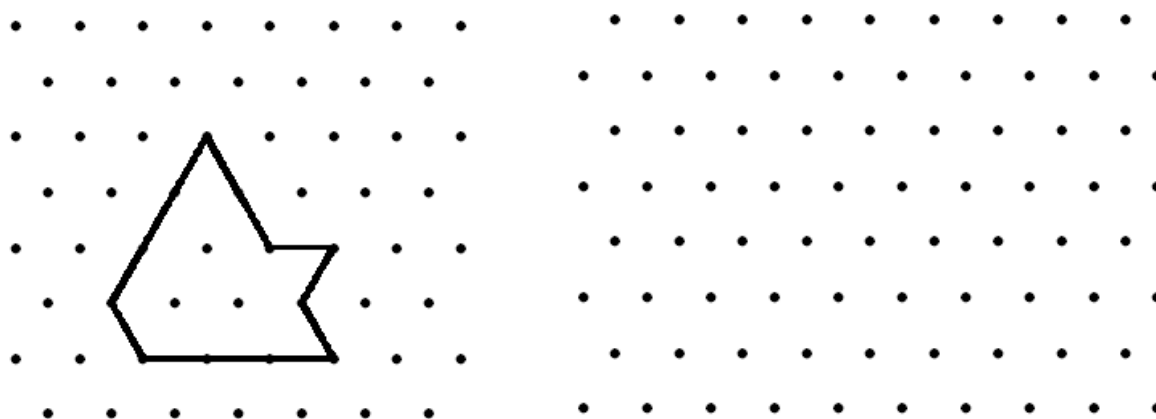


Figura 3

- d) ¿Cuántas figuras diferentes podemos formar con cinco triángulos equiláteros? Las llamaremos los **pentamantes**. Dibuja cada uno de ellos en la trama de puntos que te hemos proporcionado. Si el lado del triángulo equilátero mide 1, calcula el perímetro de cada uno de los pentamantes.

- e) Varios pentamantes se han combinado para formar la Figura 4, Halla una disposición de los pentamantes con la que se obtiene esa figura.

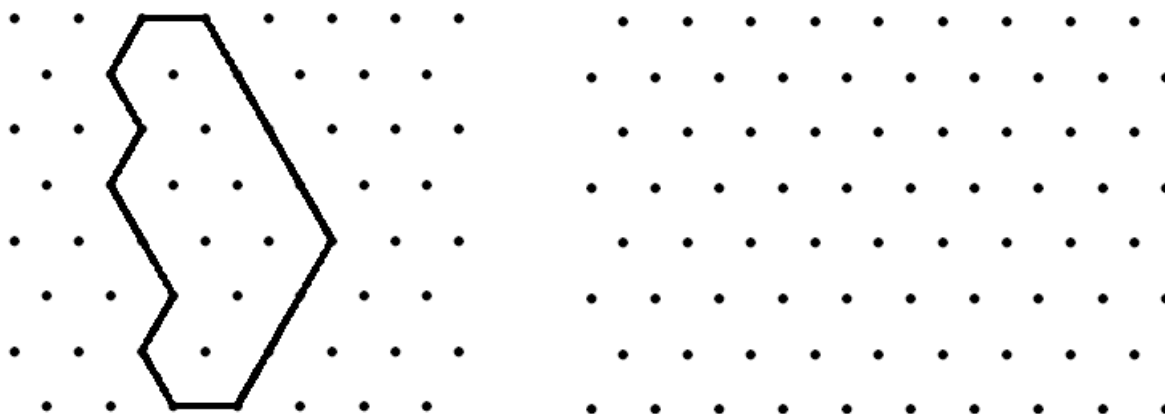
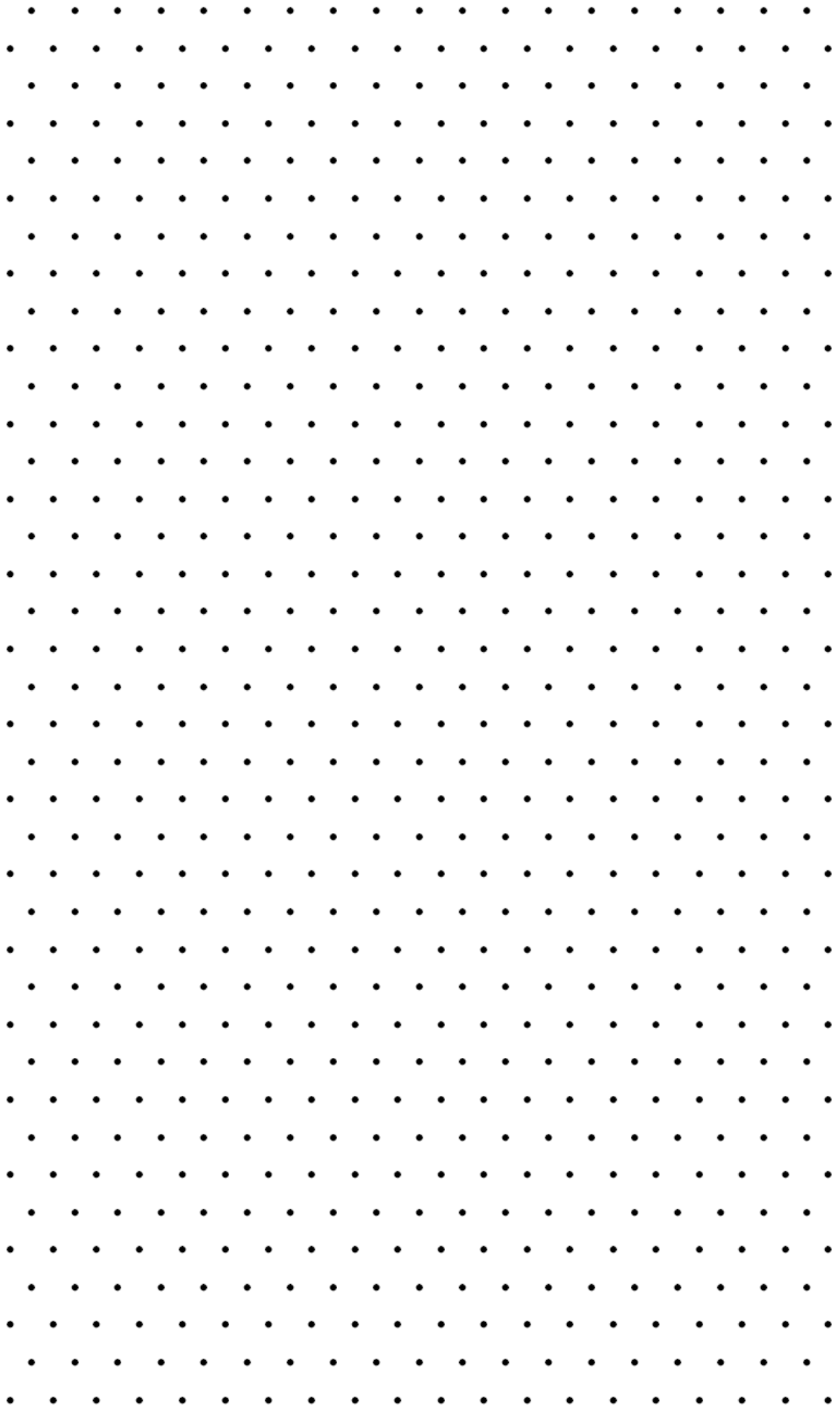
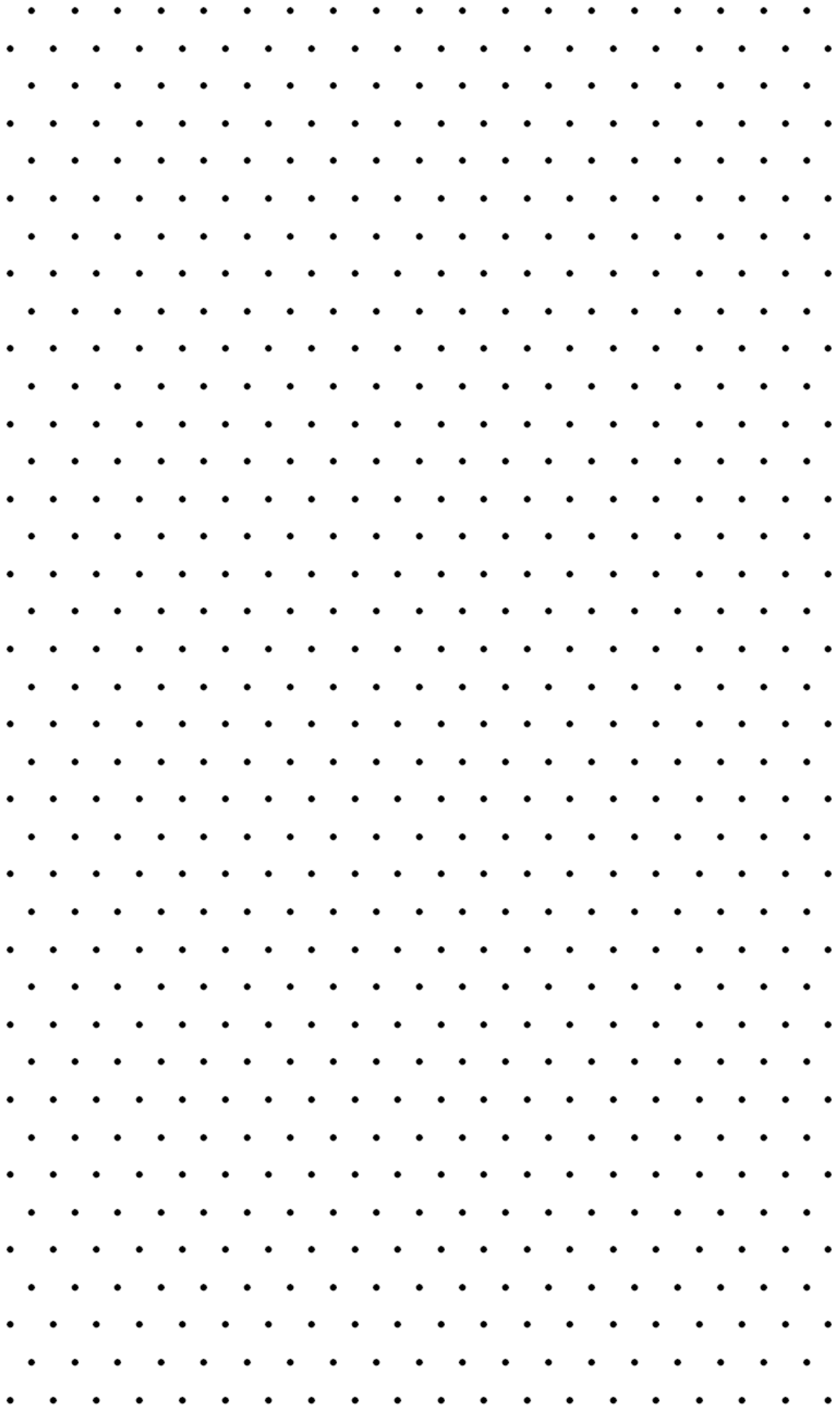


Figura 4





Problema nº 4: El cubo rodante

Se tiene un cubo, con números del 1 al 6, en cada una de sus caras, cuyo desarrollo es el dado en la Figura 1.

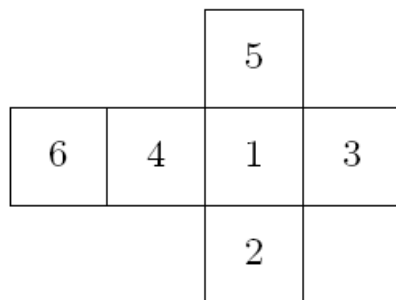


Figura 1

- a) La Figura 2 representa también el desarrollo de un cubo. ¿Es este cubo igual al cubo inicial de la Figura 1? Justifica la respuesta.

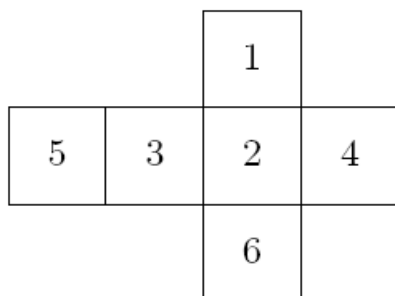


Figura 2

- b) Se dispone de un tablero con doce casillas del mismo tamaño que las caras del cubo. Se coloca el cubo de la Figura 1 en la casilla A-1 del tablero, siendo la cara superior la ocupada por el número 1. Cada movimiento del cubo consiste en voltearlo sobre una de sus aristas hasta situarlo en una de las casillas vecinas.

Explica por qué la configuración de la Figura 3 no se puede obtener mediante el proceso antes descrito de movimientos del cubo a partir de la posición A-1.

	1	2	3	4
A	1	4	2	1
B	3	3	6	5
C	2	3	2	6

Figura 3

(Sigue al dorso)

c) Se han realizado, desde la posición inicial, una serie de movimientos como los descritos en el apartado b) de forma que el cubo de la Figura 1 ha pasado una sola vez por cada una de las casillas del tablero y en cada una hemos anotado el número que figura en la cara de arriba. El resultado obtenido es el que aparece en la Figura 4.

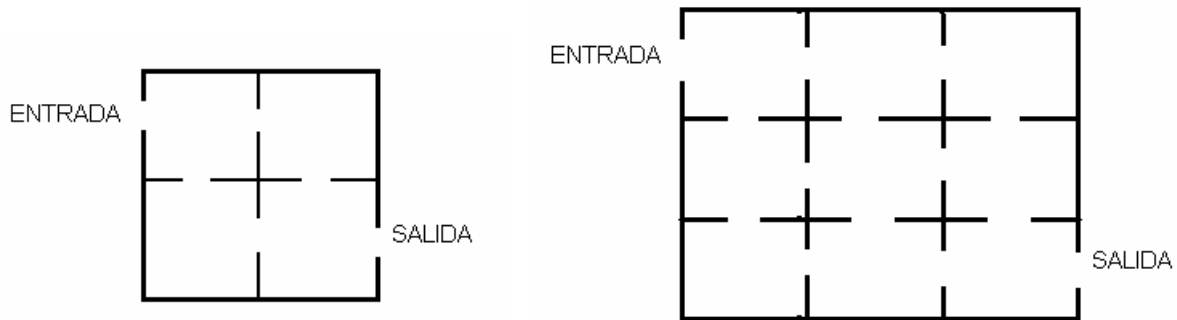
Di cuál ha sido el camino que, sobre el tablero, ha seguido el cubo en el ejemplo de la Figura 4, explicando tu razonamiento.

	1	2	3	4
A	1	4	6	3
B	3	3	5	5
C	2	6	6	4

Figura 4

Problema nº 5: El museo

Las salas de un Museo son habitaciones cuadradas de 10 metros de lado. Cada habitación está conectada por una puerta con cada una de las habitaciones con las que comparte un lado. La entrada y la salida del Museo están situadas en habitaciones diametralmente opuestas. En los dibujos aparecen dos diseños diferentes de Museo. El de la izquierda está formado por cuatro habitaciones dispuestas como un cuadrado, diremos que es un Museo 2x2. El de la derecha es un Museo 3x3:



Un visitante del Museo que entra por la ENTRADA desea visitar cada habitación exactamente una vez y salir por la SALIDA. A estos recorridos los llamaremos **caminos aceptables**.

(a) ¿Puedes encontrar un camino aceptable en el Museo 2x2? ¿Y en el Museo 3x3?

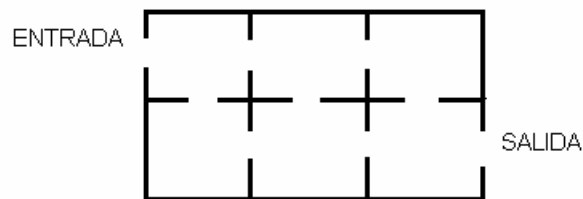
(b) Inténtalo en los Museos 4x4 y 5x5 (dibújalos e intenta encontrar caminos aceptables en ellos).

(c) Seguro que en algunos de los anteriores casos no has conseguido encontrar ningún camino aceptable. Intenta explicar por qué no lo has conseguido. Quizás te ayude pintar de blanco y negro, alternativamente, las habitaciones del Museo (como si fuera un tablero de ajedrez).

(d) No vas a dibujar un museo 1000x1000, pero te lo puedes imaginar y tratar de ver si hay un camino aceptable o no. Lo mismo podrías hacer con otro museo que sea 725x725. Y lo mismo podrías hacer con un museo que sea de la forma $N \times N$, donde N representa un número cualquiera.

¿Podrías dar una regla general que nos permita decidir si en un Museo cuadrado $N \times N$ vamos a poder encontrar un camino de esos o no?

(e) Planteamos ahora la misma pregunta, pero para Museos rectangulares. Entrénate, por ejemplo, con Museos 5x6, 4x6, 5x7, etc.

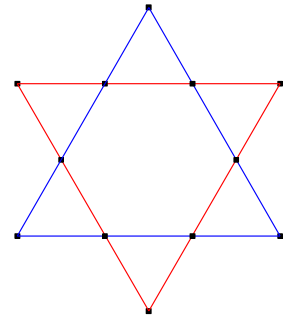


Imagínate un museo de dimensión 400x600, o bien 5000x7000, ¿podrías encontrar un camino aceptable?. Lo mismo podrías hacer con un museo que sea de la forma $N \times M$, donde N es un número cualquiera y M es otro número cualquiera distinto de N . Intenta contestar a la siguiente pregunta: ¿qué condiciones han de cumplir N y M para que en un Museo $N \times M$ haya con seguridad un camino de éstos?

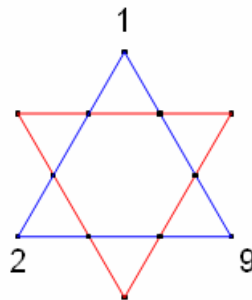
Problema nº 6. Jugando con las estrellas

Se considera la **estrella de David**, formada con dos triángulos equiláteros que se cortan como los de la figura, determinando 12 puntos de corte (seis vértices y seis puntos de intersección de lados).

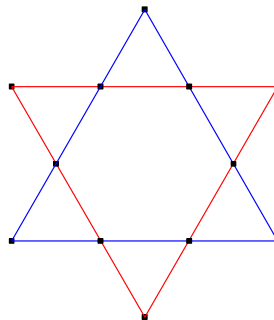
Un juego consiste en construir una *estrella mágica* colocando en dichos puntos los números del 1 al 12 sin repetir ninguno, con la condición de que los cuatro que están sobre cada lado sumen siempre lo mismo.



1) Encuentra una solución en la que sobre los tres vértices de uno de los triángulos estén los números 1, 2 y 9, con la condición de que los cuatro que están sobre cada lado sumen 26.



2) Encuentra otra solución sabiendo que la suma de los números colocados en los seis vértices sea también 26 y que, además, los números colocados en los vértices de uno de los triángulos son impares y suman lo mismo que los colocados en los vértices del otro triángulo.

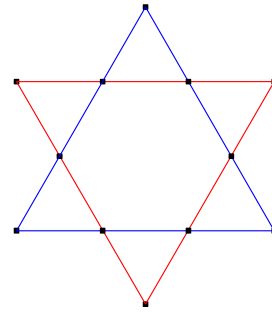
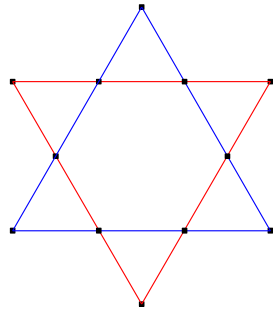
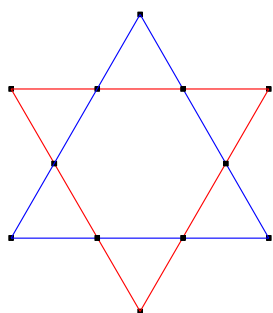
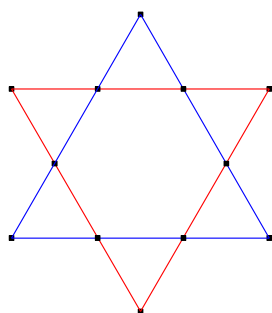
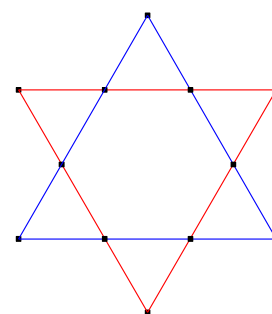
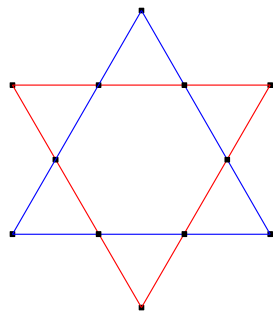
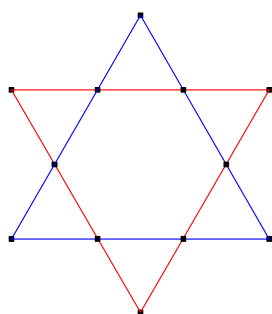
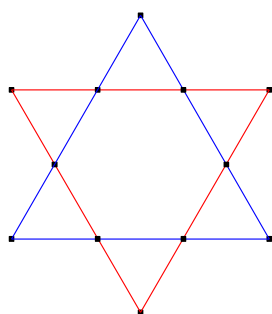
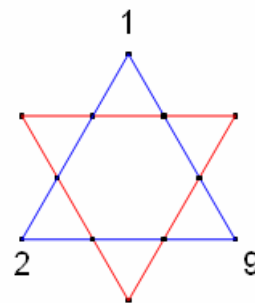
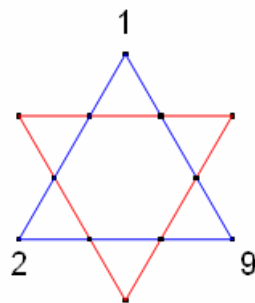
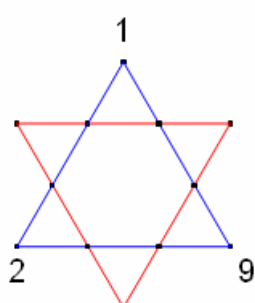
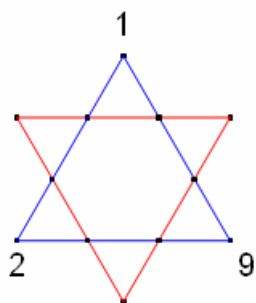


3) En cualquier solución de la *estrella mágica* la suma de los cuatro números colocados sobre un lado es siempre 26. Explica por qué.

(Sigue al dorso)

- 4) En cualquier solución de la *estrella mágica* la suma de los números colocados sobre los vértices de uno de los triángulos es igual a la suma de los números colocados sobre los vértices del otro triángulo. Explica por qué.

(Más estrellas para practicar).



PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS
Estímulo del talento matemático



Prueba de selección
2 de junio de 2007

Nombre:.....
Apellidos:.....
Fecha de nacimiento:.....
Teléfonos:.....

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

Queremos conocer no solamente tus soluciones, sino sobre todo tus propios caminos hacia la solución.

Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos. Al final nos debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas, deberías tratar de describirnoslas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

- ☐ A través de tu colegio,
- ☐ A través del Concurso de Primavera,
- ☐ A través de otros medios.

Tienes dos horas en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: máximo tiempo para un ejercicio 30 minutos.

Te deseamos mucho éxito.

1. EL JUEGO DE LAS PIEDRAS



Se trata de un juego para dos jugadores, Ana y Pedro. Para jugar sólo se necesitan unas cuantas piedras.

Las reglas son muy sencillas: Cada jugador, en su turno puede coger 1 o 2 piedras. Gana el jugador que retira la última piedra que, evidentemente, puede ir acompañada.

Se pide:

1. Si hay 5 piedras, encuentra un modo de jugar de Ana de manera que si es la primera jugadora en sacar piedras, esté segura de ganar.
2. Si hay 20 piedras, encuentra un modo de jugar de Ana de manera que si ella es la primera jugadora en sacar piedras, esté segura de ganar.
3. ¿Qué pasa si en el montón, al comenzar a jugar, hay veintiuna piedras? ¿Y si hay veintidós? ¿Y si, en general, hay un número cualquiera?
4. ¿Qué pasa si en el montón hay veinte piedras pero en vez de coger sólo una o dos, se pueden coger una, dos o tres?

Explica claramente todo lo que has visto.

2. LAS PARTIDAS

Tres amigos A, B y C acuerdan jugar un torneo de tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Se sabe además que cada uno perdió una partida en el orden siguiente: primero perdió el jugador A, luego lo hizo el jugador B y, finalmente, el jugador C.

Un ejemplo de cómo podría haberse desarrollado la partida se muestra en la siguiente tabla:

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida	70	40	20
Después de que pierda el jugador A	10	80	40
Después de que pierda el jugador B	20	30	80
Después de que pierda el jugador C	40	60	30

- a) Completa en la siguiente tabla las situaciones que se tendrían después de cada partida, en este otro supuesto de dinero inicial.

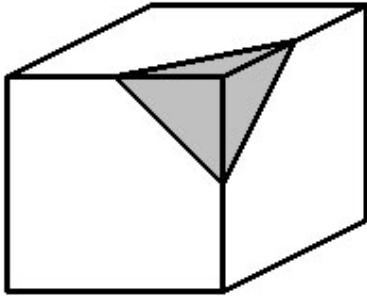
	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida	60	30	20
Después de que pierda el jugador A			
Después de que pierda el jugador B			
Después de que pierda el jugador C			

Con las mismas condiciones de orden de pérdida de cada partida responde a los siguientes apartados:

- b) Se sabe que al final del torneo cada uno tenía 24 €, ¿cuánto dinero tenía cada jugador al comienzo?
- c) Se conoce que en otro torneo de las mismas características, el jugador C comenzó con 20 € y al final acabaron todos con la misma cantidad de dinero ¿cuánto tenía cada jugador al comienzo y con cuánto acabaron?
- d) En otro torneo sucedió que se tuvo que suspender en la tercera partida ya que el jugador C no pudo hacer frente a los pagos correspondientes. Describe esta situación con un ejemplo.
- e) Dicen que en una ocasión acabaron todos con la misma cantidad de dinero con la que comenzaron. ¿Es posible que se dé esta situación? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, pon un ejemplo que lo ilustre.

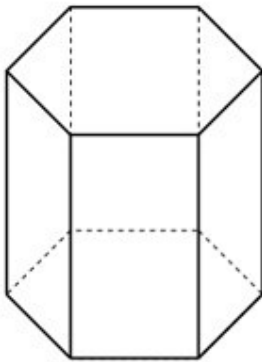
3. CUBO CORTADO

a) Uniendo los puntos medios de las aristas de un cubo como se ve en la figura, se obtienen pirámides triangulares. Si construimos una nueva figura geométrica sólida quitando estas pirámides, ¿cuántas, caras, vértices y aristas tiene el cuerpo resultante? Describe cómo has llegado al resultado.



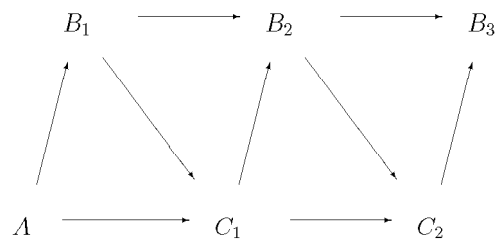
b) Ahora vamos a hacer una variación, sobre el problema anterior. En vez de tomar los puntos medios, elegimos los puntos sobre las aristas y situados a un tercio de distancia de los vértices. Resultando, al unirlos, unas pirámides más pequeñas y que no se tocan entre ellas. Si recortamos estas pirámides, ¿cuántas, caras, vértices y aristas tiene la figura que resulta? Describe cómo has llegado al resultado.

c) Si en vez de un cubo, consideramos el prisma hexagonal regular de la figura (las bases son hexágonos regulares), y procedemos como en el apartado a) ¿cuántas, caras, vértices y aristas tiene el cuerpo resultante? Describe cómo has llegado al resultado.



4. CAMINOS

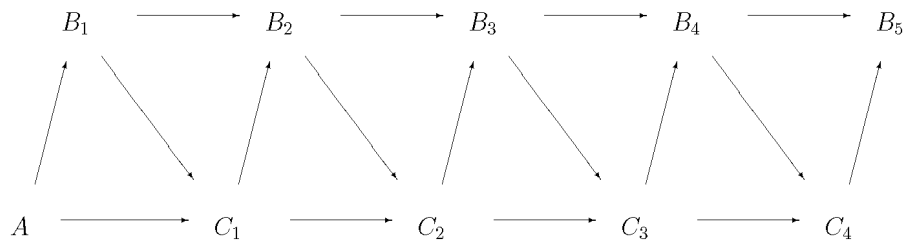
Se tiene la siguiente estructura:



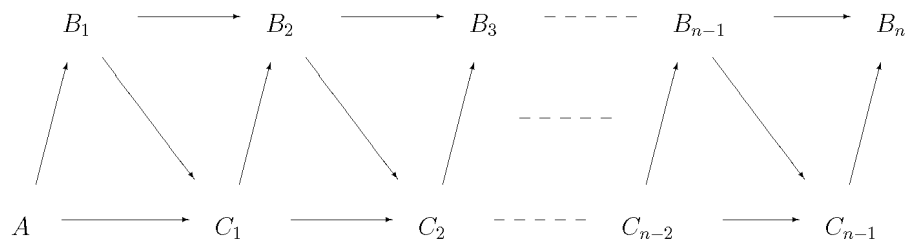
De un punto a otro se consideran los caminos siguiendo la dirección de las flechas. Observa que de A a B_1 hay un solo camino y que de A a C_1 hay dos caminos.

1. ¿Cuántos caminos hay de A a B_2 ?
2. ¿Cuántos de A a B_3 ?

Incrementamos el número de flechas de la estructura hasta obtener la siguiente:

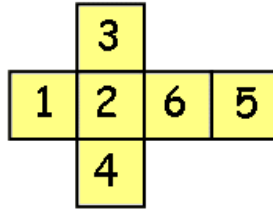


3. Desarrolla una estrategia que te permita calcular el número de caminos de A a cada uno de los puntos B_1 , B_2 , B_3 , B_4 y B_5 . ¿Cuántos caminos hay de A a B_5 ?
4. Extiende los resultados obtenidos a estructuras de este tipo con un número cualquiera de puntos. Indica una estrategia que te permita calcular el número de caminos desde el primer punto A al último punto B_n .



5. DADOS GIGANTES

Tenemos ocho dados iguales con las caras numeradas de 1 a 6. Cada uno de los dados tiene el desarrollo plano siguiente:



Con los ocho dados construimos un cubo, que llamaremos “Gran Dado”

- a) Si sumamos todos los números que vemos en las seis caras del “Gran Dado”, ¿cuál es la suma más grande que se puede obtener?
- b) En el dado pintado, la suma de los puntos de dos caras opuestas es siempre la misma. ¿Podemos construir un “Gran Dado” de manera que si miramos dos caras opuestas la suma de todos los puntos que hay en esas caras siempre es la misma? Describe como has llegado al resultado.
- c) ¿Podemos construir un “Gran Dado” de forma que la suma de los puntos que hay en cada una de sus seis caras sean los números consecutivos 19, 20, 21, 22, 23 y 24? Razona tu respuesta

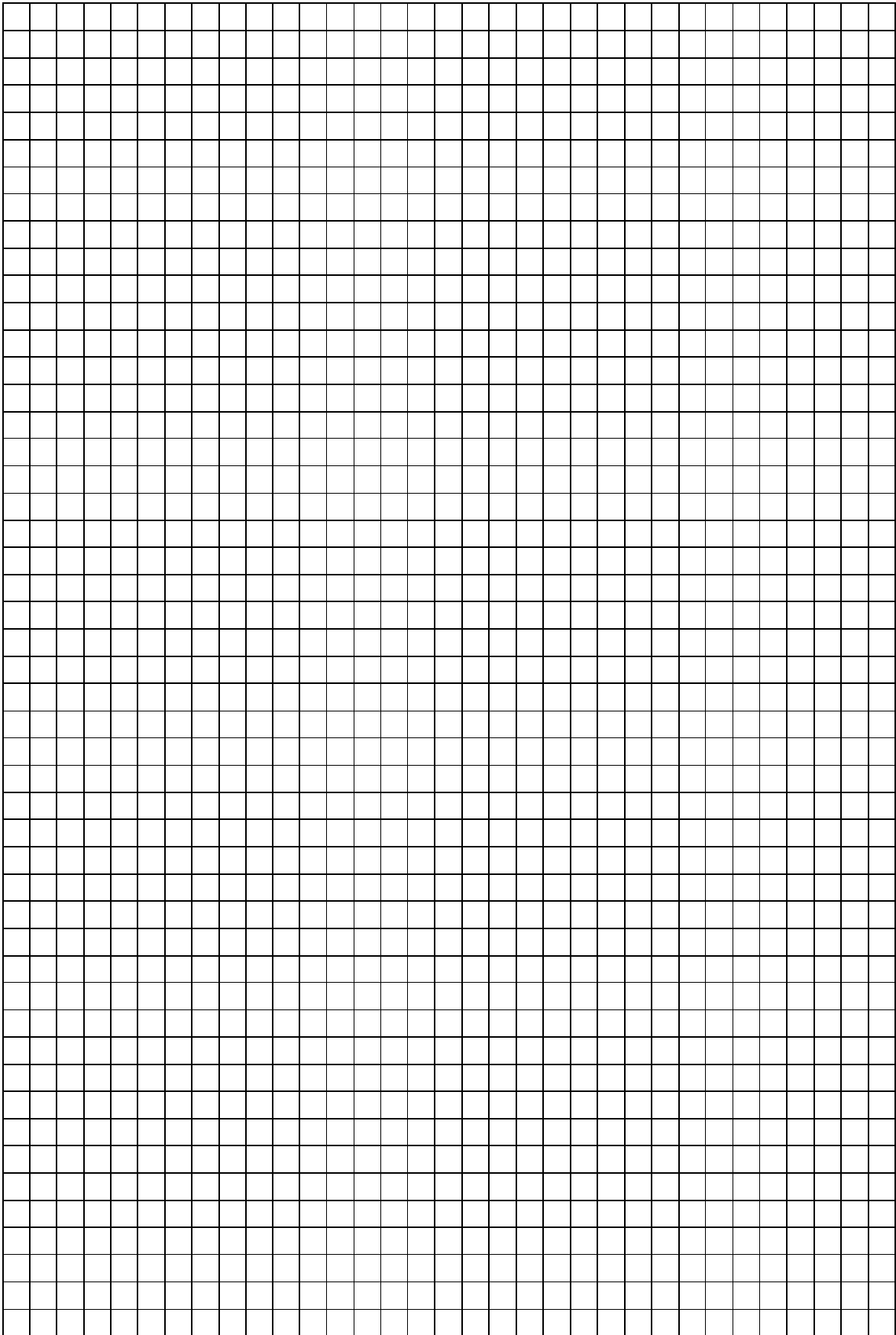
Ahora tenemos veintisiete dados iguales con las caras numeradas de 1 a 6. Con los veintisiete dados construimos un cubo más grande que el anterior, le llamaremos “Mega Dado”

- d) Si sumamos todos los números que vemos en las seis caras del “Mega Dado”, cuál es la suma más grande que se puede obtener.

6. RECTÁNGULOS.

En la cuadrícula de la página siguiente dibuja un cuadrado de 8×8 (es decir de 8 unidades de lado). En la misma cuadrícula dibuja aparte cuatro rectángulos de 3×5 .

- a) Razona dibujando, cómo podrías cubrir parte del cuadrado de 8×8 con los 4 rectángulos, sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.
- b) Busca todas las parejas de números naturales (a, b) que cumplan que $a + b = 8$ (como por ejemplo $(3, 5)$) y en cada caso explica cómo puedes colocar los cuatro rectángulos de lado a y b sobre el cuadrado de 8×8 , sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.
- c) Pensando en la zona que queda por cubrir en cada caso ¿puedes encontrar alguna característica que cumpla la suma de las áreas de los cuatro rectángulos respecto al área total del cuadrado de 8×8 ?
- d) ¿Crees que se cumpliría la misma propiedad en el caso de un cuadrado de 9×9 y los cuatro rectángulos de lados que sumen 9?
- e) Sin dibujarlos, explica con cuántas parejas diferentes de números naturales (a, b) que sumen 99 podrías colocar los cuatro rectángulos sobre un cuadrado de 99×99 , sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.
- f) Pon un ejemplo en el que se vea que no siempre es posible colocar cuatro rectángulos iguales sobre un cuadrado (sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos) aunque la suma de las áreas de los cuatro rectángulos sea menor que el área del cuadrado.



PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección
31 de mayo de 2008



Nombre:.....

Apellidos:.....

Fecha de nacimiento:.....

Teléfonos:.....

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, ¿cómo te has enterado de esta convocatoria?

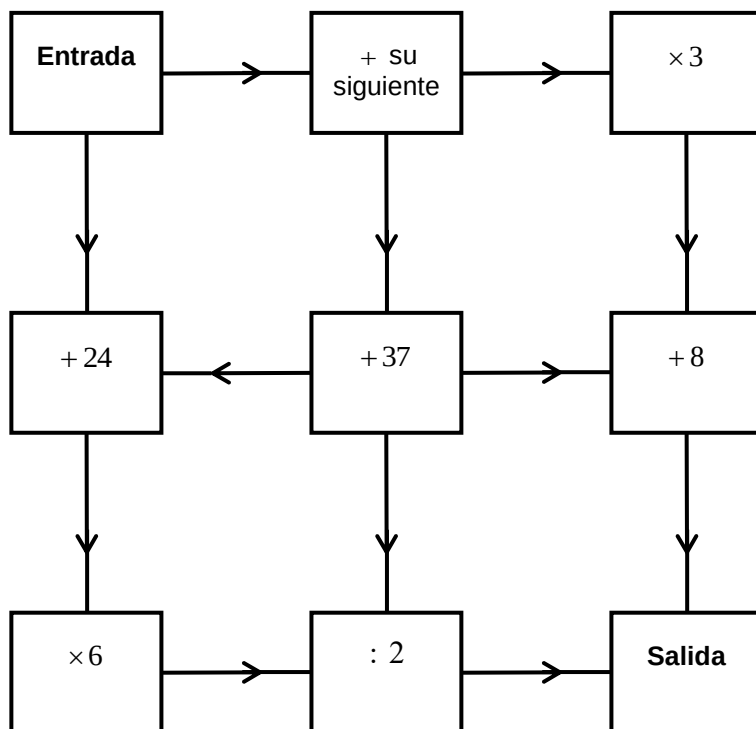
- ☐ A través de tu colegio.
- ☐ A través de otros medios.

Tienes dos horas en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

Te deseamos mucho éxito.

1. CIRCUITO

Este circuito solo reconoce **números positivos sin decimales 0, 1, 2, 3,.....** Cuando un número entra en este circuito se coloca en la casilla de **Entrada** y siguiendo las flechas va avanzando hasta llegar a la **Salida**. En cada casilla debe realizar la operación que se indica y continuar su recorrido.

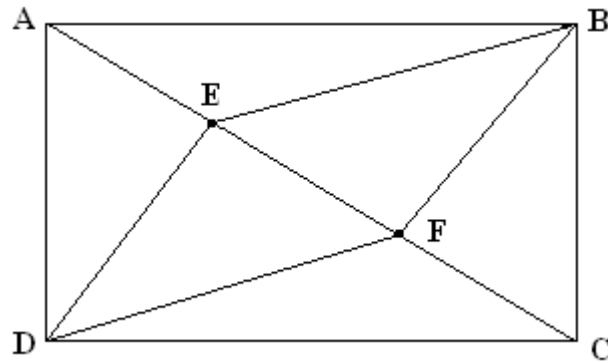


- a) Irene se dio un paseo por este circuito y salió convertida en el 17. ¿Qué itinerario siguió y qué número era al principio?
- b) Nuria y Olga entraron al circuito siendo el mismo número y decidieron no pasar por la casilla central. Cada una eligió un camino distinto. Si Olga salió convertida en el 83, ¿qué itinerario siguió Olga?, ¿qué itinerario siguió Nuria?, ¿qué número eran al principio?, ¿en qué número se convirtió Nuria?
- c) Explica por qué todo número que llegue a la casilla $\boxed{: 2}$ puede dividirse por dos siendo exacta la división.
- d) El miércoles observé a un número menor que 50 entrando en el circuito y salió transformado en el 396. ¿Qué camino siguió?
- e) ¿Es posible ir por los caminos del borde y llegar al mismo número? Contesta de manera razonada.



2. RECTÁNGULO

Sea el rectángulo ABCD de la figura. Dividimos la diagonal AC en tres segmentos iguales mediante los puntos E y F. Unimos los puntos E y F con B y con D.

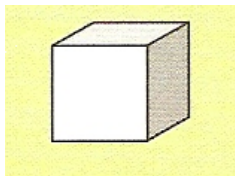


- a) Si hago el recorrido ABCFEDABCFEDA.... desplazándome por los segmentos trazados ¿en qué punto acabaré tras pasar por 2008 letras?
- b) ¿Se podrá hacer un recorrido que pase por todos los segmentos de esa figura una sola vez empezando desde A? ¿Y empezando desde B? Dibújalo si es posible y di que dificultad has encontrado si crees que no lo es.
- c) Si la base del rectángulo mide 12 m y la altura 9 m. ¿Cuál es el área del triángulo de vértices BEF?
- d) Dividimos la otra diagonal en tres segmentos iguales mediante los puntos G y H y se forma el cuadrilátero EGFH ¿Cuál es su área?

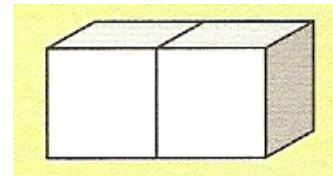


3. POLICUBOS

Un policubo es un sólido macizo que se obtiene al pegar por sus caras cubos unitarios. El orden de un policubo es el número de cubos necesarios para formarlo. A continuación se muestran todos los policubos de órdenes 1, 2 y 3.

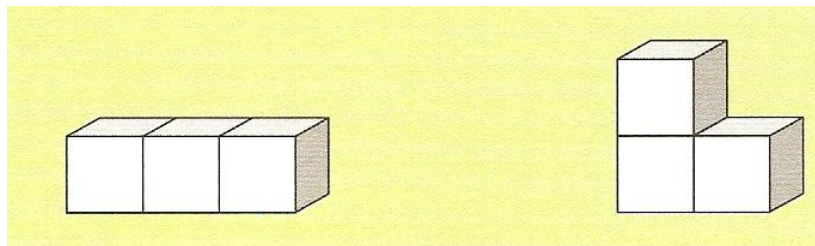


Orden 1



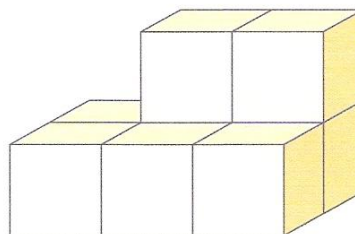
Orden 2

Orden 3

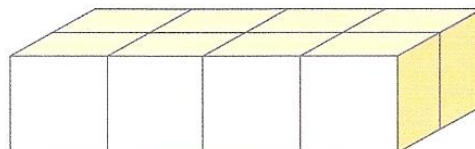


a) ¿Sabrías decir cuántos policubos de orden 4 hay? Dibuja todos los policubos de orden 4.

b) Dibuja dos descomposiciones distintas de los policubos de orden cuatro que necesitas para construir la siguiente figura.



c) Utilizando policubos de orden cuatro, sin repetir ninguno, ¿se pueden recubrir todas las caras de la siguiente figura? Razona la respuesta.





4. LOS TRES SOBRES

En una mesa hay tres sobres marcados con las letras **A, B y C**. Los tres contienen una cantidad (entera) diferente de euros y no hay ninguno vacío, con la peculiaridad de que C es el que más euros tiene y A el que menos. **Ana, Beatriz y Carlos** son tres hermanos “excelentes lógicos” que examinan cada uno el sobre marcado con su inicial. Considera los siguientes casos:

- a) Si el total de dinero en los tres sobres es **10 euros**
Ana coge el sobre A, lo mira y dice: "Ya sé cuánto hay en cada sobre".
¿Podrías deducirlo tú también?
- b) Si el total de dinero en los tres sobres es **11 euros**
Carlos mira el sobre C y dice: "Ya sé cuánto hay en cada sobre". A continuación Ana mira el sobre A y dice: "Ya sé cuánto hay en cada sobre", entonces Beatriz, sin mirar, asegura saber cuánto hay en su sobre.
¿Podrías decir tú cuánto hay en cada sobre?
- c) Si el total de dinero en los tres sobres es **13 euros**
Ana, después de mirar el contenido de su sobre, declara que no puede deducir el contenido de los otros sobres. Mira entonces Carlos el suyo y dice que él tampoco puede saberlo. Entonces, Beatriz examina el suyo y declara que tampoco ella puede deducirlo.
¿Cuánto dinero hay en el sobre B?
- d) Si el total de dinero en los tres sobres es **32 euros**
 - 1) ¿De cuántas maneras distintas se pueden distribuir los 32 euros en los tres sobres de forma tal que en C haya más que en B y en B más que en A?
 - 2) Si Ana mira su sobre en primer lugar, ¿puede averiguar el contenido de los otros dos sobres? Razona la respuesta.



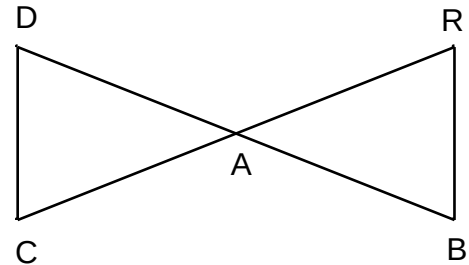
5. PALABRAS MÁGICAS

Un ilusionista está buscando palabras mágicas para utilizarlas en sus trucos de magia.

Decide construir esas palabras mágicas partiendo de este diagrama de la siguiente manera.

Recorre un camino de este diagrama y anota las letras que encuentra.

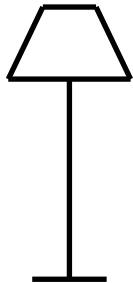
Cada palabra mágica empieza y termina por A y dos letras consecutivas no pueden ser idénticas. Por ejemplo una palabra mágica sería ABRACADABRA.



- a) Es muy fácil encontrar todas las palabras mágicas que tienen 3 letras, escríbelas todas.
- b) Escribe todas las palabras mágicas formadas por 4 letras.
- c) A partir de las palabras mágicas obtenidas anteriormente se pueden escribir todas las palabras mágicas de 5 letras. Sin necesidad de escribirlas todas, ¿cuántas hay?
- d) ¿Cuántas palabras mágicas de 11 letras podemos formar?



6. LÍO DE LÁMPARAS EN UNA HABITACIÓN



En una habitación cuadrada se pueden poner lámparas de pie como la que ves en el dibujo. Te dicen que las coloques junto a la pared, con la condición de que haya el mismo número de lámparas en cada una de las cuatro paredes de la habitación. Para ello te permiten poner, como máximo, una lámpara en cada uno de los cuatro rincones de la habitación y, en ese caso, la lámpara se cuenta como perteneciente a las dos paredes que forman ese rincón (no siempre es necesario poner lámparas en un rincón).

- a) Tienes **12** lámparas. ¿Cómo puedes colocarlas? Haz un dibujo que nos diga, de un vistazo, la solución.
- b) Ahora tienes **10** lámparas. ¿Cómo puedes colocarlas? Haz un dibujo que nos diga, de un vistazo, la solución.
- c) Resuelve el mismo problema para **11** y para **13** lámparas.
- d) Prueba con otros cuatro números consecutivos, por ejemplo, 20, 21, 22 y 23 lámparas y comprueba que también es posible. Haz un dibujo explicativo en cada caso.
- e) Para un número cualquiera de lámparas, ¿podrías hacer unos dibujos que representen las diferentes soluciones del problema según sea el número de lámparas? ¿Cómo puedes hacerlo? ¿Cuántas habrá en cada pared?

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección Junio de 2009

Nombre:.....
Apellidos:.....
Fecha de nacimiento:.....
Teléfonos:.....
Correo electrónico:

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir.

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

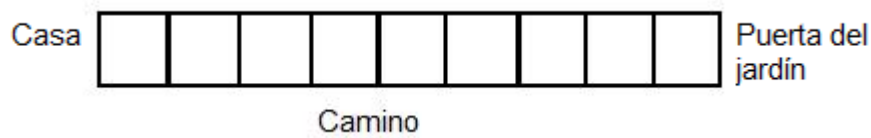
Tienes hora y media en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio.

Te deseamos mucho éxito.



1. EMBALDOSAR

En casa de Marta hay un camino que une la puerta del jardín con la puerta de la casa que mide nueve metros de largo y uno de ancho. Queremos recubrir el camino y tenemos dos clases de baldosas: baldosas cuadradas de $1\text{m} \times 1\text{m}$ de color negro y baldosas rectangulares de $2\text{m} \times 1\text{m}$ de color blanco.



Tipos de baldosas



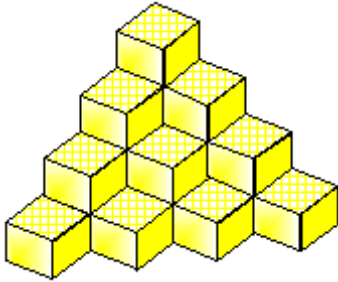
- a) ¿De cuántas formas se puede embaldosar el camino si utilizamos una baldosa negra y las demás blancas?
- b) Si utilizamos tres baldosas negras, ¿de cuántas maneras se puede embaldosar el camino?
- c) Y si utilizamos cinco baldosas negras, ¿de cuántas formas se puede hacer?

2. CROMOS

Juan colecciona cromos de los dos equipos de fútbol que hay en su ciudad, el equipo A y el equipo B. Los cromos los pega en las 6 hojas de un álbum, de modo que en cada hoja o bien hay jugadores del equipo A o bien del equipo B, pero nunca están mezclados. El número de cromos que hay pegados en cada hoja son 6, 12, 14, 15, 23 y 29. Juan, señalando una de las hojas, afirma: "si regalo esta hoja de cromos, quedarán el doble de cromos del equipo A que del equipo B".

- a) ¿Es posible que la hoja a la que se refiere Juan sea la de 14 cromos?
- b) ¿Podría ser la de 15 cromos?
- c) ¿Y la de 12 cromos?
- d) Formula un criterio sencillo para decidir qué hojas no podría regalar.

3. TORRE DE CUBOS



Con cubos de un metro de arista construimos torres como la que te mostramos. (Observa que ésta tiene cuatro pisos, pero las podemos construir de cualquier número de pisos). Queremos pegar pegatinas en las caras visibles de los cubos, es decir, que no estén tapadas por otro cubo ni estén apoyándose en el suelo.

- a) Según la cantidad de pisos que tenga la torre podremos pegar un número determinado de pegatinas. Completa la siguiente tabla.

Número de pisos	1	2	3	4	5	6
Número de pegatinas que es posible pegar						

- b) ¿Qué altura tendrá que tener la torre para colocar 180 pegatinas?
- c) ¿Podrías encontrar una formula que relacione que el número de caras visibles y los pisos de la torre?

4. NÚMEROS COLOREADOS

Los números se colorean de rojo, verde o azul con las siguientes condiciones que no pueden entrar en contradicción:

- * La suma de dos números de color azul da un número de color verde.
- * La suma de dos números de color verde da un número de color azul.
- * El resto de los números son de color rojo.

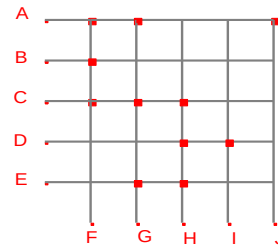
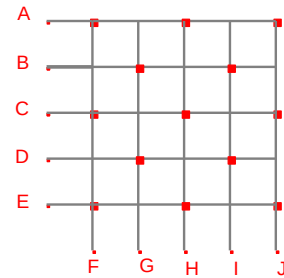
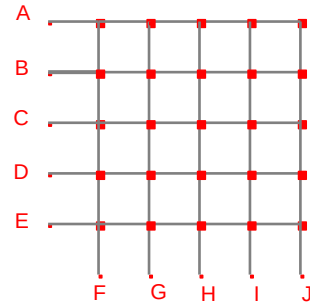
- a) Si el número uno se pinta de color verde, ¿de qué color serían los números del 1 hasta el 10?
- b) Si el número uno se pinta de color verde, como antes, ¿de qué color sería el número 125? ¿Y el 381?
- c) Si el número uno se pinta de color azul, ¿de qué color sería el número 2009?

5. BOMBILLAS

Raúl ha montado un circuito eléctrico formado por 25 bombillas y 10 interruptores, A,B,C,D,E,F,G,H,I,J como en el dibujo de la derecha. Si tocamos un interruptor cualquiera las 5 bombillas situadas en la línea del interruptor cambian de estado, es decir las que estaban encendidas se apagan y las que estaban apagadas se encienden.

- a) Si inicialmente están todas encendidas, describe un proceso por el que se llegue a la situación de la figura de la derecha, donde los puntos representan las bombillas que están encendidas y el resto están apagadas.

- b) Si partimos de una situación como la de la figura adjunta donde los puntos son bombillas encendidas, manipulando los interruptores ¿se podría llegar a tener todas las bombillas apagadas?



PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección
5 de junio de 2010



Nombre:.....

Apellidos:.....

Fecha de
nacimiento:.....

Teléfonos:.....

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, ¿cómo te has enterado de esta convocatoria?

- ☐ A través de tu colegio.
- ☐ A través de otros medios.

No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

Te deseamos mucho éxito



1. HALLANDO LAS COORDENADAS

Fíjate en la siguiente pirámide de números:

	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
1					1				
2				2	3	4			
3			5	6	7	8	9		
4		10	11	12	13	14	15	16	
5	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Cada número queda definido por la fila y la columna en la que se encuentra. Por ejemplo, el número 1 está en la fila 1 y en la columna 1, así diremos que sus coordenadas son (1, 1). El número 2 está en la fila 2 y columna -1, por tanto sus coordenadas son (2, -1). Las coordenadas de 4 son (2, 2), las de 18 son (5, -3) etc.

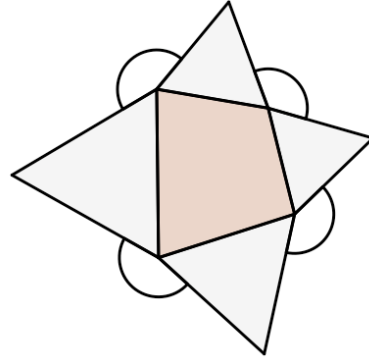
a) ¿Podrías decirnos cuáles son las coordenadas del número 626? ¿Y cuáles las de 895? ¿Y las de 9999? Explica tu razonamiento.

b) Encuentra el número cuyas coordenadas vienen dadas por (40, 30) y el número de coordenadas (50, -10).

2. TRIÁNGULOS

Se tiene un cuadrilátero como en la Figura 1 y sobre cada uno de sus lados y en el exterior de ese cuadrilátero se dibujan triángulos equiláteros.

Figura 1



a) ¿Cuánto vale la suma de todos los ángulos que se forman entre triángulos equiláteros contiguos?

b) Ahora, en vez de un cuadrilátero, tenemos un polígono de ocho lados y también dibujamos triángulos equiláteros sobre sus lados en el exterior de ese polígono. (Figura 2)

¿Cuánto vale la suma de todos los ángulos que se forman entre triángulos equiláteros contiguos?

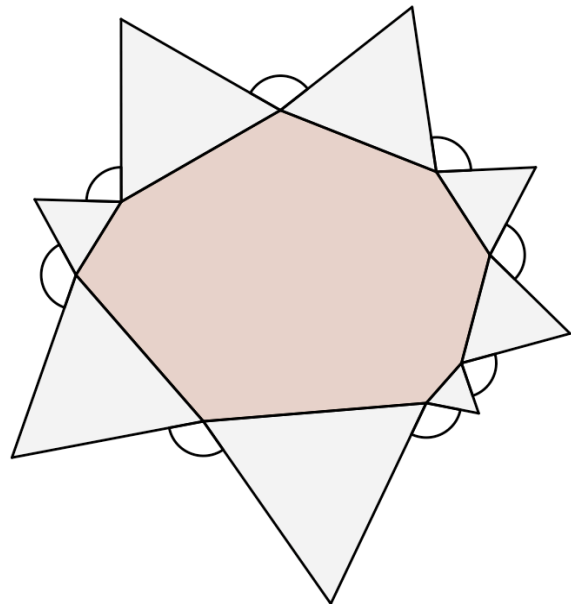
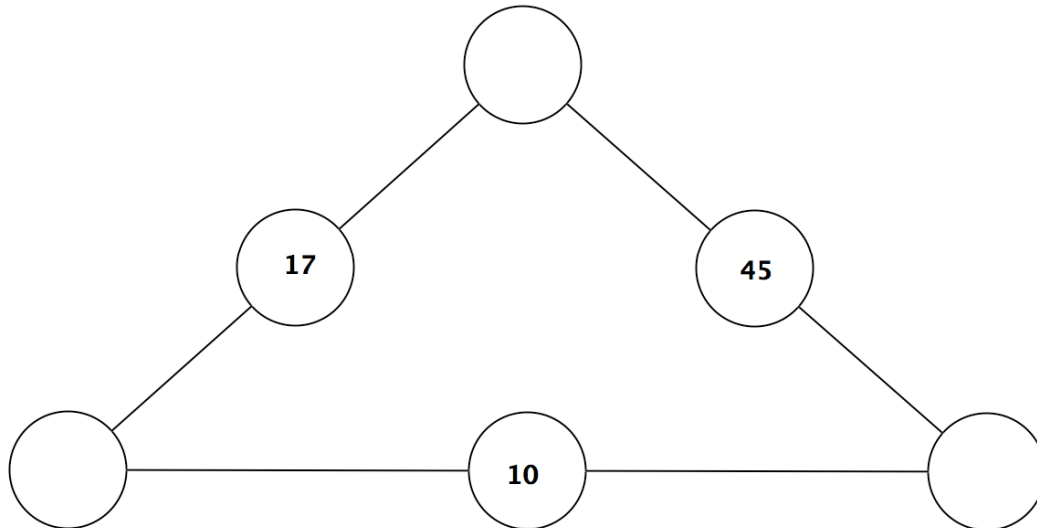


Figura 2

c) Y si el polígono tuviera 1000 lados, ¿cuánto valdría la suma de esos ángulos?

3. NÚMEROS EN UN TRIÁNGULO

Se considera el triángulo numérico de la figura:

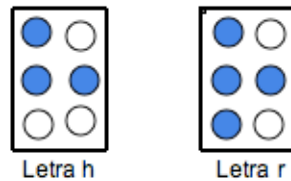


- a) Rellena con números enteros positivos los círculos en blanco de forma que la suma de los tres números de cada lado del triángulo sea la misma.
- b) ¿Puedes encontrar otra solución? ¿Cuál?
- c) Si hubieras encontrado una solución, ¿cómo podrías encontrar otra?
¿Cuántas soluciones diferentes crees que existen?
- d) Encuentra una solución donde la suma de cada lado sea 80.



4. BRAILLE

El Braille es un sistema de escritura táctil que utilizan las personas ciegas o las que tienen deficiencias visuales muy graves. En Braille estándar cada símbolo está representado por una combinación de puntos en relieve colocados sobre un rectángulo que tiene 3 filas y 2 columnas. En cada símbolo hay de 1 a 6 puntos señalados.



- a) ¿Cuántos símbolos de Braille utilizan sólo dos puntos?
- b) ¿Cuántos hay que utilizan cuatro puntos? Razona por qué hay tantos de dos puntos como de cuatro.
- c) ¿Cuántos hay que utilizan tres símbolos?
- d) Hay una versión más simple de Braille, en ella se utilizan puntos en relieve sobre un cuadrado 2x2. ¿Cuántos símbolos se pueden generar en total en esta versión reducida? En cada símbolo al menos hay un punto marcado.
- e) Para aumentar el número de símbolos se ensayó una versión de Braille en la que los puntos se colocan sobre un rectángulo que tiene cuatro filas y dos columnas; ¿cuántos símbolos distintos tiene esta versión? Como antes, en cada símbolo hay al menos un punto marcado.

5. VIRUS

En un hospital hay un número de pacientes que siempre es una potencia de 2 EXACTA (por ejemplo: 2, 4, 8, 16, 32, etc.). En el hospital ronda un virus que afecta de la siguiente manera:

El DÍA 1, la mitad de los pacientes están sanos y la otra mitad están enfermos.

El DÍA 2, la mitad de los que enfermaron el día 1, sanan.

El DÍA 3, la mitad de los que sanaron el día 2, enferman.

El DÍA 4, la mitad de los que enfermaron el día 3, sanan.

El DÍA 5, la mitad de los que sanaron el día 4, enferman.

Y este proceso continúa así hasta que el virus se estabiliza, que resulta ser cuando el número de pacientes sanos que queda es impar.

a) Completa la siguiente tabla:

(**P** = Número Total Pacientes; **E** = Número Pacientes Enfermos; **S** = Número Pacientes Sanos)

	DIA 1		DIA 2		DIA 3		DIA 4		DIA 5		DIA 6	
P	S	E	S	E	S	E	S	E	S	E	S	E
8	4	4	6	2	5	3	-	-	-	-	-	-
16	8	8	12	4	10	6	11	5	-	-	-	-
32												
64												

b) ¿En cuántos días se estabiliza el virus si comenzamos con 1024 pacientes?
¿Cuántos pacientes sanos y cuántos enfermos habrá entonces?

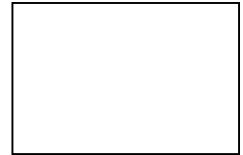
c) Si el virus se estabiliza en 7 días, ¿cuántos pacientes comenzaron el experimento? ¿Y si se estabiliza en 12 días?

d) Si el virus se estabiliza con 1365 pacientes sanos, ¿podría haber en ese momento un número par de pacientes enfermos? ¿Cuántos pacientes había al principio?

e) Si cuando el virus se estabiliza, el número de pacientes sanos es superior al doble de enfermos, ¿pueden haber pasado un número impar de días desde que comenzó el proceso?

f) ¿Sabrías decir, sea cuál sea el número inicial de pacientes, cuál es el número de pacientes sanos y enfermos que resultan cuando el virus se estabiliza?

6. POSICIONES



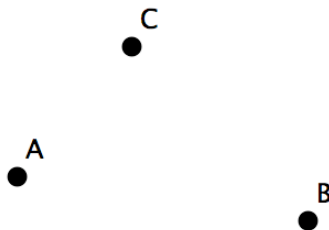
- a) Los puntos **A** y **B** son dos vértices de un **triángulo equilátero**. Describe con precisión y dibuja todas las posiciones donde se puede situar el tercer vértice **C**.



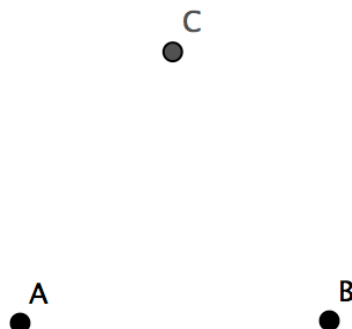
- b) Los puntos **A** y **B** son dos vértices de un **triángulo isósceles**. Describe con precisión y dibuja todas las posiciones donde se puede situar el tercer vértice **C**.



- c) Los puntos **A**, **B** y **C** son tres vértices de un **paralelogramo**. Describe con precisión y dibuja todas las posiciones donde se puede situar el cuarto vértice **D**.



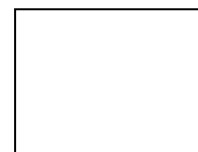
- d) Los puntos **A**, **B** y **C** son los tres vértices de un **triángulo equilátero**. Señala las posiciones donde podrías colocar un punto **P** de forma que los triángulos **PAB**, **PBC** y **PCA** sean **isósceles**.



PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección
4 de junio de 2011



Nombre:.....

Apellidos:.....

Fecha de nacimiento:

Teléfonos:.....

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

☐ A través de tu colegio.

☐ A través de otros medios.

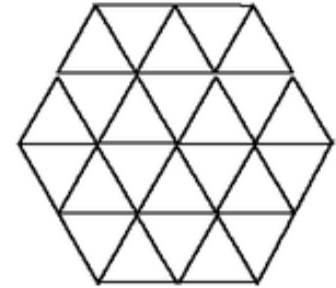
Tienes dos horas y media en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

Te deseamos mucho éxito.

1. EL ZOOOLÓGICO



Un zoológico tiene forma hexagonal con celdas que son triángulos equiláteros de 10 metros de lado, como en la figura. Por seguridad no puede haber dos animales en una misma celda y si una celda está ocupada ninguna de las que comparte un lado con ella puede estarlo.

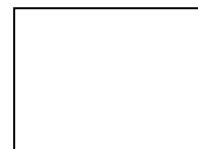


a) ¿Cómo distribuirías los animales en un zoológico como el de la figura para que se cumpla la regla anterior?

b) Si el hexágono mide 50 metros de lado, ¿cuántos animales se pueden poner en el zoológico como máximo?

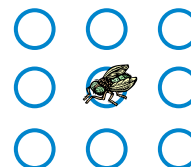
c) ¿Cuánto mide el lado del hexágono más pequeño que permite construir este zoológico en el que se puedan poner 1000 animales salvajes?

2. EL PASEO DE UNA MOSCA INQUIETA



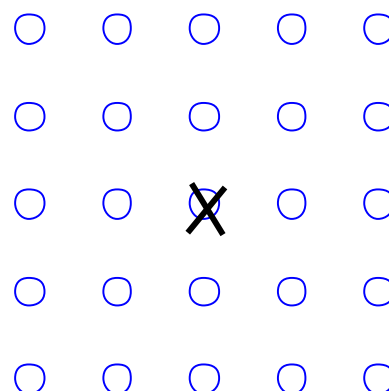
Colocamos en una mesa 9 monedas iguales formando un cuadrado 3 x 3.

Una mosca inquieta viene volando y se posa en la moneda central pero, tras explorarla, se le ocurre hacer un paseo andando por las 9 monedas, pasando de una a otra horizontalmente y verticalmente y sin pasar dos veces por la misma moneda.



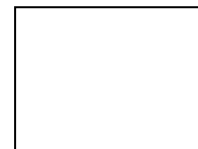
- ¿Podrá hacerlo? ¿Qué camino/itinerario será el adecuado? ¿Hay más de un camino posible?
- ¿Y si se hubiera posado en la moneda que está justo a la izquierda de la indicada? ¿Lo podrá hacer también? ¿Cuál será el camino?

- Imagina ahora que colocamos 25 monedas iguales formando un cuadrado 5 x 5, y que la mosca se posa en la moneda central.
¿Podrá hacer ahora el paseo con las mismas condiciones que antes? ¿Qué camino será el adecuado? ¿Habrá más de uno?

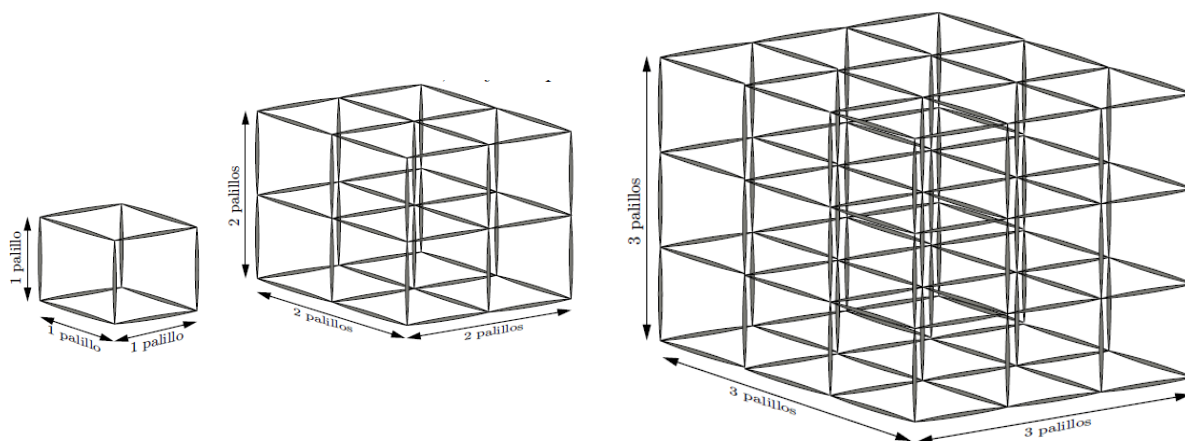


- ¿Lo podrá hacer si se posa en la moneda que está justo debajo de la central? ¿Cuál será el camino?
- Y si colocamos **2011 x 2011** monedas formando un cuadrado y se posa la mosca en una de ellas, ¿cuándo puede dar el paseo posándose en todas una sola vez y pasando de una a otra sólo horizontalmente y verticalmente? ¿Por qué?

3. REDES DE PALILLOS EN EL ESPACIO

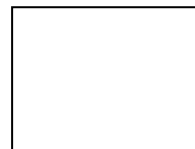


En la figura se ven tres redes hechas de palillos iguales. Las redes son cúbicas de arista uno, dos y tres palillos respectivamente y, para hacer cada una de ellas se han necesitado 12, 54 y 144 palillos respectivamente.



- a) ¿Cuántos palillos se necesitan para hacer una red cúbica con 5 palillos en cada arista? ¿Por qué?
- b) ¿Cuántos palillos se necesitan para hacer una red cúbica con 100 palillos en cada arista? Explica tu razonamiento
- c) Con 2012 palillos, ¿se puede hacer una red cúbica? Si la respuesta es «sí» ¿cuántos palillos tiene esa red en cada arista? Si la respuesta es «no», explica por qué no se puede.
- d) Si disponemos de 2730 barritas, ¿cuál es el lado del cubo más grande que puedo construir?

4. JUEGO CARA Y CRUZ



Mafalda y Felipe tiran una moneda y juegan a cara y cruz. Cada vez que sale cara Mafalda gana un punto y cada vez que sale cruz Felipe gana un punto. Para controlar el juego hay un marcador en el que inicialmente pone (0,0) y si sale cara se anota en primer lugar y si sale cruz en segundo lugar, así cuando ponga (3,2) es porque han salido 3 caras y 2 cruces pero no sabemos en qué orden han salido las caras y las cruces.



El juego se termina si uno de los dos tiene 3 puntos, por ejemplo, si el marcador pone (3,0) el juego se termina y gana Mafalda.

- a) Para llegar al resultado (3,0) lo hemos podido hacer sólo de una manera, pero para llegar a otros resultados lo podemos hacer de más formas. Calcula de cuántas formas distintas puede haber conseguido ganar Mafalda.

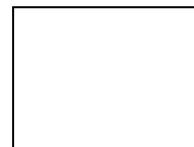
Ahora han decidido que el juego se termina si uno de los dos tiene 4 puntos, o bien si alguno de los dos tiene al menos un punto y una ventaja de 2 puntos sobre el otro.

- b) ¿De cuántas formas distintas puede ganar Felipe?

Ahora han decidido que el juego se termina si uno de los dos tiene 6 puntos, o bien uno de ellos tiene al menos 4 puntos y una ventaja de 3 puntos sobre el otro.

- c) Escribe todos los pares en los que se acaba el juego.
- d) ¿De cuántas formas distintas se puede acabar el juego?

5. TABLA LOCA DE NÚMEROS



En la siguiente tabla se escriben los números con la siguiente pauta:

- En la primera fila colocamos el 2.
- En la segunda fila colocamos los dos impares consecutivos siguientes a 2.
- En la tercera fila, ponemos tres pares consecutivos, los que siguen al último impar escrito en la fila anterior.
- En la cuarta fila, cuatro impares consecutivos, los que siguen al último par escrito en la fila anterior.
- Y seguimos así sucesivamente.

2							
3	5						
6	8	10					
11	13	15	17				
18	20	22	24	26			

- a) ¿Serías capaz de completar tres filas más?
- b) ¿Cuántos números tendrá la fila décima? ¿Y la vigésima?
- c) ¿Aparecerá el número 2011 en esta tabla? Si es que sí, ¿en qué fila y en qué columna? Si es que no, explica por qué.
- d) ¿Cuántos números menores que 2011 habrá en la tabla?

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático



Prueba de selección

2 de junio de 2012

Nombre:.....
Apellidos:.....
Fecha de nacimiento:.....
Teléfonos:.....

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

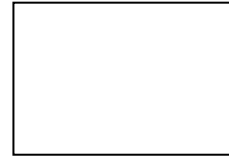
Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

- ☐ A través de tu colegio.
- ☐ A través del *Concurso de Primavera*.
- ☐ A través de otros medios.

Tienes dos horas y media en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

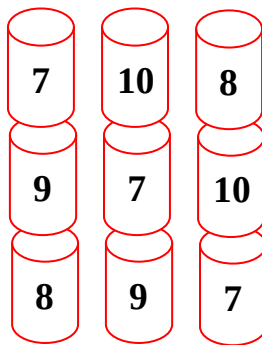
Te deseamos mucho éxito.



1. UNA CASETA DE TIRO EN LA FERIA

En la caseta de tiro de la feria puedes poner a prueba tu precisión lanzando pelotas de tenis. Hay nueve botes, cada uno con un número, apilados como muestra la figura. Y los lanzamientos que efectúes han de cumplir una serie de reglas:

- Dispones de tres lanzamientos
- En cada uno de ellos sólo puedes derribar un bote, sólo uno. Por tanto estás siempre obligado a lanzar a uno de los botes que quedan, tras cada lanzamiento, en la parte superior.
- En el caso de que derribes los tres botes debidamente, esto es, siempre uno de la parte superior, conseguirás como puntuación la suma de lo que indique el bote tumbado en el primer lanzamiento, más el doble de lo que marque el segundo bote, más el triple de lo indique el tercero.



Según la puntuación que obtengas conseguirás un premio u otro.

- a) ¿Qué puntuación máxima obtendrías si tumbas los tres botes superiores de cada columna?
- b) En caso de que quieras derribar toda una columna, ¿qué columna conviene derribar para obtener la mayor puntuación?
- c) Considerando todos los casos posibles, ¿qué puntuación máxima puedes lograr?
- d) Para conseguir exactamente **50** puntos. ¿Qué botes deberías derribar?

2. ROBOT TRAMOL



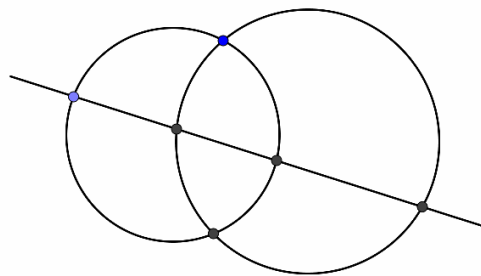
TRAMOL es un robot que puede subir las escaleras. Además en cada paso puede subir o bien un escalón, o bien dos escalones o bien tres escalones. Cuando en un paso sube un escalón decimos que está en modo A; cuando con un paso sube dos escalones decimos que está en modo B y cuando con un paso sube tres escalones decimos que está en modo C. Con el robot nos comunicamos a través de mensajes formados con las letras A, B y C. Si enviamos el mensaje AABC, TRAMOL subirá 7 escalones y lo hará en ese orden: primero dos escalones de uno en uno, luego dos escalones juntos y por último tres escalones a la vez. Si le enviamos el mensaje ABCA, subirá también 7 escalones pero esta forma es distinta de la anterior.



- a) Si tiene que subir 4 escalones, le puedo enviar el mensaje AC, o bien ABA etc. Escribe los distintos mensajes que le puedo enviar. (Recuerda que ABA es distinto de AAB).
- b) Si tiene que subir 6 escalones, ¿le puedo enviar un mensaje en el que la A aparezca exactamente 5 veces?; ¿le puedo enviar un mensaje en el que la A aparezca 4 veces?; ¿le puedo enviar un mensaje en el que no aparezca la A?; ¿Cuántos mensajes hay sin la A? Hay algún mensaje en el que aparezcan la B y la C y no aparezca la A. ¿Porqué?
- c) En total, si tiene que subir 6 escalones ¿cuántos mensajes distintos le puedo enviar?
- d) Si tiene que subir 8 escalones, ¿cuántos mensajes distintos puedo enviar?

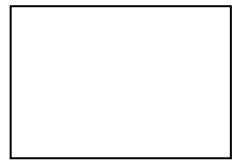
3. RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

En el plano se consideran rectas y circunferencias. En el dibujo ves dos circunferencias y una recta y hay en total seis puntos de intersección.



- a) ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección que podemos conseguir si dibujamos 3 rectas? ¿Y si dibujamos 4? ¿Y si dibujamos 12?
- b) ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección que podemos conseguir si dibujamos 3 circunferencias? ¿Y si dibujamos 4? ¿Y si dibujamos 12?
- c) ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección que podemos conseguir si dibujamos 3 circunferencias y 3 rectas? ¿Y si dibujamos 4 circunferencias y 4 rectas? ¿Y si dibujamos 12 circunferencias y 12 rectas?
- d) A la vista de lo anterior, ¿podrías describir una fórmula que diera el número máximo de puntos de intersección que se pueden producir cuando se consideran n circunferencias y n rectas en el plano?

4. SUMA DE NÚMEROS IMPARES



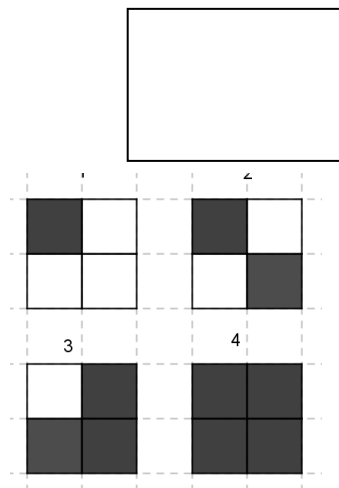
Algunos números se pueden expresar como suma de números positivos impares consecutivos. Por ejemplo $64=31+33$, pero también $64=13+15+17+19$. O por ejemplo $309=101+103+105$.

- a) Escribe 120 como suma de números positivos impares consecutivos de dos maneras distintas, explicando cómo lo haces.
- b) Escribe 75 como suma de números positivos impares consecutivos de todas las maneras posibles, explicando cómo lo haces.
- c) ¿Puedes poner 250 como suma de números positivos impares consecutivos? ¿Por qué?
- d) ¿Puedes poner 2009 como suma de números positivos impares consecutivos, y de cuántas maneras puedes hacerlo? ¿Y 2011?
- e) Podrías decir qué números SÍ pueden escribirse como suma de dos números positivos impares consecutivos y qué números NO pueden escribirse de ese modo? Razona tu respuesta.

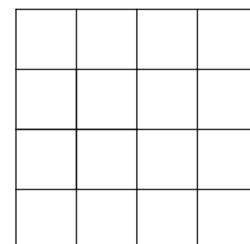
5. CUADRADOS NEGROS Y BLANCOS

Mira los dibujos de la derecha: son ejemplos de tableros de orden 2, en los que hemos coloreado de negro una, dos, tres y cuatro de sus casillas (cuadrados).

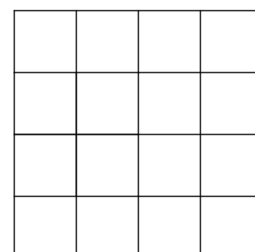
Comprueba que en los tres primeros podemos elegir una fila y una columna tales que, al borrarlas, la única casilla que nos queda es blanca, pero que en el cuarto cualquiera que sea la fila, y cualquiera que sea la columna que borremos, siempre nos queda al final una casilla negra.



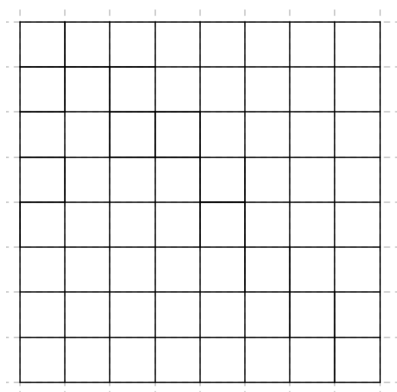
- a) Colorea tú ocho casillas en este tablero de orden 4 de manera que si se borran dos filas y dos columnas **cualesquiera** siempre quede alguna casilla negra.



- b) Ahora colorea siete casillas de manera que si se borran dos filas y dos columnas **cualesquiera** siempre quede alguna casilla negra.

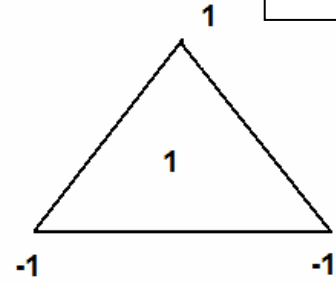


- c) ¿Puedes conseguir lo mismo coloreando únicamente seis casillas? Si la respuesta es sí, explícanos cómo coloreas. Si la respuesta es no, justifica por qué no puedes lograrlo.
- d) Mira ahora este tablero de 8. ¿Cuál es el mínimo número de cuadraditos que debes colorear de negro de manera que al borrar CUATRO filas y CUATRO columnas cualesquiera quede siempre algún cuadradito negro?



6. VÉRTICES Y TRIÁNGULOS

En los vértices de un triángulo pones un 1 o un -1 y en el interior del triángulo pones el producto de los números que has puesto en los vértices. Luego sumas todos los números que tienes, los de los vértices y los del interior. En el caso de la figura la suma es $-1 -1 +1 +1 = 0$.



- a) ¿Qué otros valores puede tener esta suma?
- b) ¿Qué valores puede tener la suma si en lugar de un triángulo comienzas con un cuadrado?
- c) Si comienzas con un polígono con un número par de vértices ¿puede ser la suma cero? Justifica tu respuesta.
- d) Si comienzas con un polígono de un número impar de vértices, ¿cuándo puede ser la suma cero? Justifica tu respuesta.

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático



Prueba de selección **11 de junio de 2013**

Nombre:.....
Apellidos:.....
Fecha de nacimiento:.....
Teléfonos:.....
Centro de Estudios: e-mail:.....

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar **DURACIÓN DE LA PRUEBA: 1 HORA Y MEDIA**

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir.

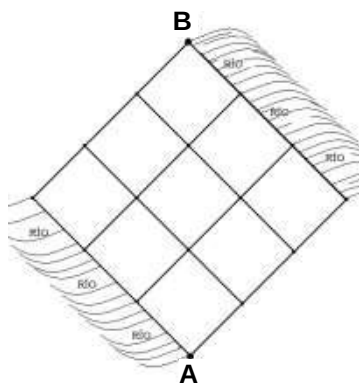
Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Te deseamos mucho éxito.

1. EL PUENTE COLGANTE

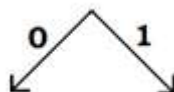
Pablo desea atravesar un puente colgante desde el punto **A** hasta el punto **B**. Para ello puede elegir entre distintos itinerarios indicados en la maqueta según las siguientes reglas:



R1) Únicamente puede pasar por los caminos indicados en la cuadrícula del puente.

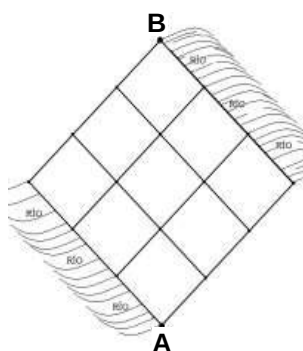
R2) Es un camino siempre “ascendente”, por tanto no puede retroceder en ningún caso.

R3) Se indicará con 0 si elige el camino hacia la izquierda y con 1 si toma el camino de la derecha, como en este dibujo:

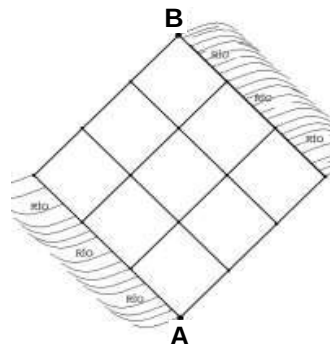


Atendiendo a estas reglas, contesta a las siguientes cuestiones:

a) Dibuja sobre la propia retícula del dibujo los siguientes itinerarios 110010 y 010101.



Itinerario 110010

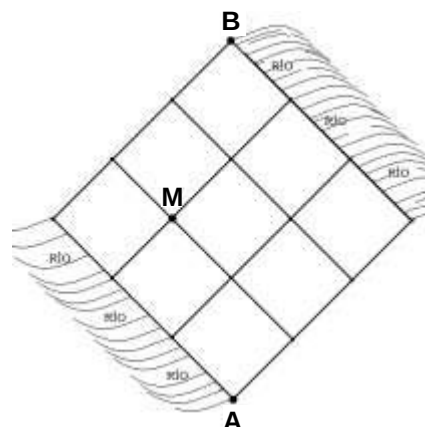


Itinerario 010101

b) Escribe, usando el código de ceros y unos, todos los itinerarios posibles para ir de **A** hasta **B** caminando una sola vez por las orillas del río.

c) Escribe todos los itinerarios posibles para ir de **A** hasta **B** caminando exactamente dos veces por las orillas del río.

d) Si sabemos que Pablo ha pasado por el punto **M**, escribe todos los itinerarios posibles desde el punto **A** hasta el punto **B** pasando por **M**.



2. DEDUCIENDO COMO SHERLOCK-HOLMES

Como puedes ver, en estas tablas hemos colocado en la primera fila y por orden, los números del **1** al **13**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

En la segunda fila has de poner también esos mismos números en cierto orden y en la tercera fila, la suma de los números correspondientes a la primera y a la segunda fila.

Queremos que, en cada uno de los tres casos que te proponemos, trates de ver si es posible o no colocarlos de forma que se cumpla la condición que te indiquemos. Si es posible pon un ejemplo y si no es posible explica por qué.

Caso 1

Suma los números de la primera y de la segunda fila **de forma que todos los resultados que obtengas en la tercera fila sean números pares**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Caso 2

De nuevo, suma los números de la primera y de la segunda fila **de forma que todos los resultados que obtengas en la tercera fila sean números impares**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Caso 3

Análogamente, suma los números de la primera y de la segunda **fila de forma que todos los resultados que obtengas sean números *cuadrados perfectos***.

(Recuerda que cuadrados perfectos son los números que se obtienen multiplicando un número por si mismo: por ejemplo 9 y 16 son cuadrados perfectos porque $9 = 3 \times 3$ y $16 = 4 \times 4$).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

3. LA MÁQUINA QUE DA CAMBIO

Una máquina que proporciona cambio, acepta cambiar sólo billetes de 10 €, 20 €, 50 € y 100 €. Funciona de la siguiente manera:

- Un billete de 10 € lo cambia por 2 de 5 €
- Un billete de 20 € lo cambia por 1 de 10 € y 2 de 5 €
- Un billete de 50 € lo cambia por 1 de 20 €, 2 de 10 € y 2 de 5 €
- Un billete de 100 € lo cambia por 1 de 50 €, 1 de 20 €, 2 de 10 € y 2 de 5 €

De entrada, se ponen en la máquina tantos billetes de 5 €, 10 €, 20 € y 50 € como sean necesarios (sin poner ni uno más) para que ésta pueda cambiar exactamente 1000 billetes (sea cual sea el tipo de billete que se quiera cambiar).

- a) ¿Cuántos billetes hay que poner en la máquina (sin poner ni uno más) para estar seguros de poder hacer 1000 operaciones, independientemente del billete que se quiera cambiar? (La máquina solo dispensa billetes que se han introducido antes de empezar a cambiar).
- b) Después de cambiar 200 billetes de 100 €, 40 billetes de 50 € y 100 billetes de 20 €, ¿cuántos billetes de cada clase quedarán al final en la máquina? (Cuenta los que van quedando y los que han entrado)
- c) Hacemos 1000 operaciones de cambio y en la máquina hay 300 billetes de 100 €, 900 de 50 €, 600 de 20 € y 1300 de 10 €. ¿Cuántos billetes de cada clase se han introducido en la máquina en estas 1000 operaciones de cambio?

4. NÚMEROS DE COLORES

Coloreamos cada uno de los números enteros con tres colores, **ROJO**, **VERDE** o **AZUL** de acuerdo con las siguientes reglas:

- I. Todos los números están coloreados
- II. El opuesto de un número ROJO es AZUL y el opuesto de un número AZUL es ROJO. Esto quiere decir que si **4** es AZUL, entonces **-4** es ROJO. Y si **20** fuera ROJO, entonces **-20** sería AZUL.
- III. La suma de dos números AZULES (no necesariamente distintos) debe ser ROJO. Por ejemplo si, como antes, **4** es AZUL, entonces **4+4 = 8** es ROJO. De acuerdo con la regla anterior **-8** será AZUL, y entonces **-20-8 = -28** sería ROJO. (Recuerda que los números enteros pueden ser negativos y que a lo hora de sumar dos enteros hay que tener en cuenta el signo, por ejemplo **3+1=4**; **-2+7=5**, **6-9=-3** y **-8-5=-13**)

a) ¿El 0 puede ser ROJO? ¿De qué color tiene que ser el 0?

b) Vamos a pintar el **1** de AZUL, En este caso, ¿de qué color es el 2?

El 3, ¿puede ser ROJO? ; ¿puede ser AZUL? ¿De qué color tenemos que pintar el 3? Explica claramente tus respuestas.

¿De qué color es el 22? ¿Y el 45? ¿Y el 32?

c) Ahora vamos a pintar el **1 VERDE** y el **2 AZUL**. ¿De qué color es el 4? ¿y el 8?, ¿y el 10? ¿De qué color es el 6? ¿Cómo se colorean todos los números pares?

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático



Prueba de selección 3 de junio de 2014

Nombre:.....
Apellidos:.....
Fecha de nacimiento:.....
Teléfonos:.....
Centro de estudios:e-mail:

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir. **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

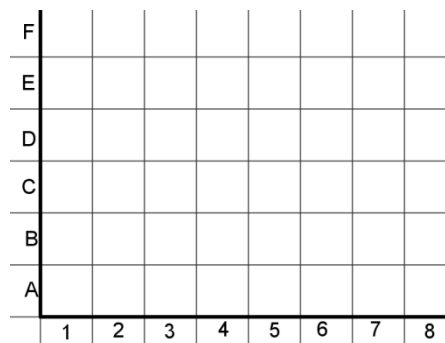
Tienes una hora y media en total.

Te deseamos mucho éxito.

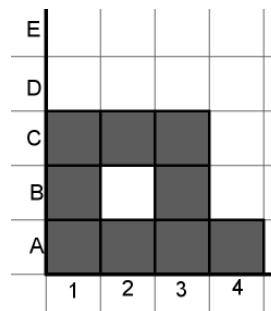
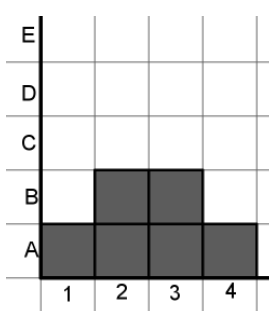
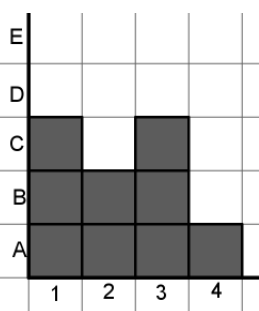
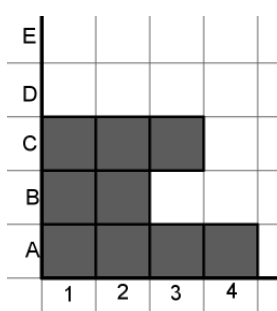
1. EL JUEGO DE LOS CUADRADOS

Enrique y Celia se entretienen coloreando cuadrados en una cuadrícula, como la que ves en la figura de manera que todas las figuras que se formen deben respetar las siguientes reglas:

1. Las filas de abajo no pueden ser más cortas que las que están encima de ellas.
2. Las columnas de la izquierda no pueden ser más bajas que las que están a su derecha.
3. Una nueva fila debe comenzar siempre en la casilla de la izquierda y una nueva columna en la casilla de más abajo. Además, no pueden quedar cuadraditos sin colorear entre cuadraditos coloreados.



Las siguientes figuras **no** son válidas pues incumplen alguna de las reglas:

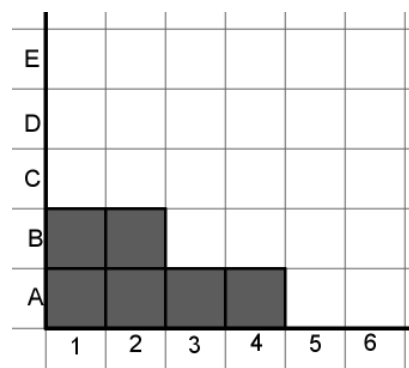


Cuando empiezan un juego, Celia debe colorear el cuadradito A1. A continuación Enrique puede colorear el A2 o el B1.

Ahora Celia puede colorear el cuadradito que quiera siempre que cumpla las reglas del juego. Después coloreará Enrique, etc...

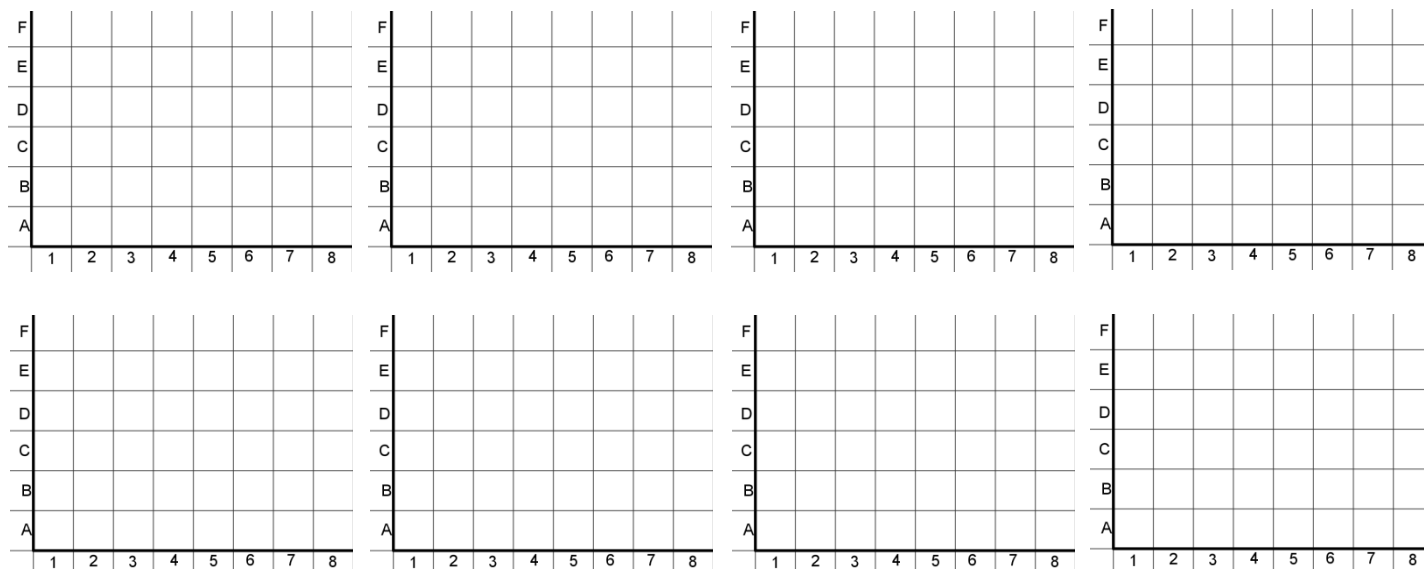
1. ¿Me puedes dibujar todas las figuras que están hechas con tres cuadraditos exactamente?

2. Observa la siguiente figura y, utilizando la información que te hemos dado, ¿qué figuras podemos obtener a partir de ella, que tengan un cuadradito más?



3. ¿Cuántas figuras hay formadas por cuatro cuadraditos? Explica razonadamente cómo lo obtienes.

4. ¿Sabes cuántas figuras están formadas por siete cuadraditos?



2. CRISS-CROSS

El juego de Criss-Cross se juega en una hoja de papel en blanco entre dos jugadores. El tablero se forma señalando tres puntos en los vértices de un triángulo equilátero, junto con uno o dos puntos adicionales en algún lugar de su interior. Se dibujan dos ejemplos en la figura de abajo. Los jugadores juegan por turno dibujando un segmento recto que una dos puntos, siempre que el segmento no pase por otros puntos ni cruce segmentos que estén en el tablero. El ganador es el último jugador que puede hacer un movimiento legal.

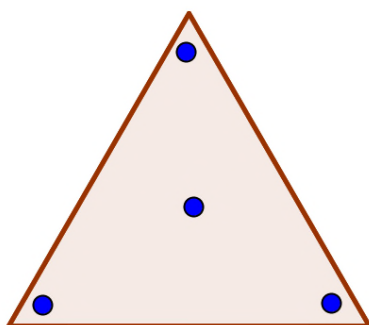


Figura 1

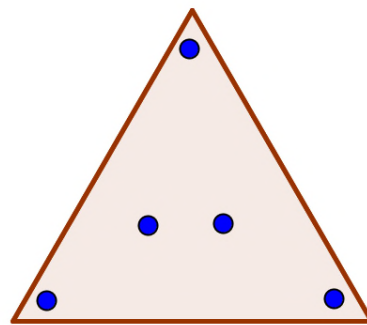


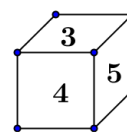
Figura 2

- a) ¿Cuántos movimientos diferentes puede hacer el primer jugador en el tablero de la figura 1? ¿Ganará el primer o el segundo jugador? Explica tu respuesta.

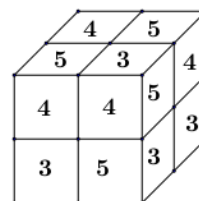
- b) ¿Cuántos movimientos diferentes puede hacer el primer jugador en el tablero de la figura 2? ¿Ganará el primer o el segundo jugador? Explica tu respuesta.

3. CUBOS

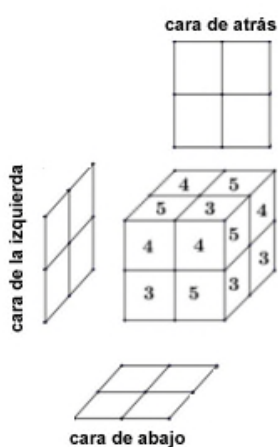
En un cubo ponemos en sus caras dos treses, dos cuatros y dos cincos, de modo que dos caras opuestas tienen el mismo número, por ejemplo el cubo de la figura de la derecha, en el que la cara opuesta al 3 tiene un 3, etc.



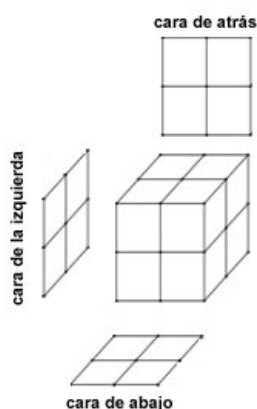
- a) Con 8 cubitos como este formamos un cubo más grande, por ejemplo este:



Indica una posibilidad para los números que aparecerían en las caras que no se ven.



- b) ¿Se pueden tener todas las caras con los 4 números iguales? Si no se puede, da una explicación y si se puede dibújala.



- c) Explica con detalle por qué no podríamos tener los números colocados como muestra la representación siguiente de un cubo construido con 8 cubos como los de este ejercicio

		3	5					
		4	3					
3	3	5	4	5	3	4	5	
4	5	3	3	4	3	5	4	
		4	5					
		5	4					

4. ETIQUETAS

A partir de unos números vamos a construir unas ETIQUETAS que las vamos a utilizar para codificar objetos de acuerdo con las siguientes reglas:

a) Una etiqueta puede no tener ningún número, por ejemplo:



b) Si tiene dos o más números estos son distintos y están ordenados de manera creciente, así de las dos etiquetas de la derecha, la de arriba es válida y la de abajo no lo es.

124

214

c) Por razones de seguridad no hay ninguna etiqueta que tenga tres números consecutivos, es decir la etiqueta de la derecha no es válida.

13458

1. Consideramos el conjunto de números $[1, 2, 3]$, describe todas las etiquetas de estas características que se pueden formar.

2. Consideramos el conjunto de números $[1, 2, 3, 4]$, describe todas las etiquetas de estas características se pueden formar.

3. Consideramos el conjunto de números $[1, 2, 3, 4, 5]$, describe todas las etiquetas de estas características se pueden formar.

5. MONEDAS

Alicia, Berta, Carlos, Daniel y Elena se reparten las monedas de una caja de acuerdo con las siguientes reglas:

Todos reciben al menos una moneda.

Alicia recibe menos monedas que Berta, Berta recibe menos que Carlos, Carlos recibe menos que Daniel y Daniel recibe menos que Elena.

Cada uno de ellos NO sabe cuántas monedas tienen los demás, sólo conoce las monedas que tiene y el número total de monedas que hay en la caja.

a) Si la caja tiene 15 monedas, ¿se puede deducir cuántas monedas ha recibido cada uno?

b) Si la caja tiene 17 monedas, ¿Daniel puede saber cuántas monedas tiene cada uno?



PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático



Prueba de selección 6 de junio de 2015

Nombre:.....
Apellidos:.....
Fecha de nacimiento:.....
Teléfonos:.....

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

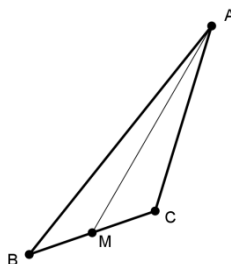
Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Tienes dos horas y media en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

Te deseamos mucho éxito.

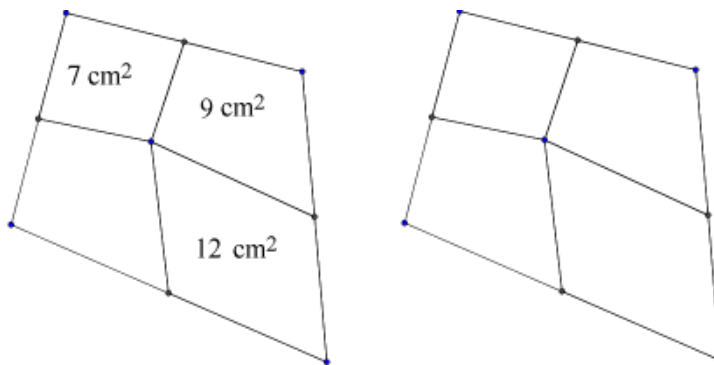
1. CUADRILATEROS Y TRIÁNGULOS

- a) Consideremos un triángulo cualquiera ABC y en el lado BC su punto medio M. Dividimos el triángulo en otros dos AMB y ACM, como se ve en la figura. Si el área de AMB es 4 cm^2 , ¿cuál es el área del otro triángulo ACM? Justifica la respuesta

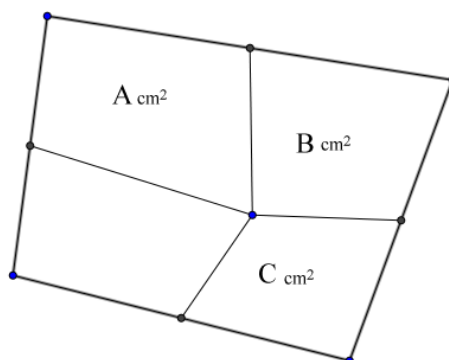


- b) Consideremos ahora un cuadrilátero como el de la figura. Si escogemos en él un punto interior y lo unimos con los puntos medios de los cuatro lados, el cuadrilátero inicial queda descompuesto en cuatro cuadriláteros más pequeños. Si las áreas de tres de estos cuadriláteros consecutivos son 7 cm^2 , 9 cm^2 y 12 cm^2 , como se indica en la figura, ¿cuál es el área del cuarto cuadrilátero de dicha descomposición?

Nota: Las áreas no están dibujadas a escala.



- c) Ahora te pedimos que generalices. Repite los apartados anteriores con otro cuadrilátero de partida pero indicando las áreas de tres de los cuatro cuadriláteros consecutivos de la descomposición como A, B y C cm^2 . Debes indicar con una operación entre A, B y C cuál crees que sería el área del cuarto cuadrilátero de la descomposición.



2. CORTES

- a) Si tenemos un trozo de cuerda y, con unas tijeras, le hacemos un corte obtenemos dos trozos de cuerda. Si al trozo de cuerda inicial le hubiésemos hecho dos cortes tendríamos tres trozos; con tres cortes, cuatro trozos. Muy fácil: con 53 cortes, ¿cuántos trozos obtendríamos?
- b) Ahora tenemos una pizza. Si le hacemos un corte de lado a lado tendremos dos porciones de pizza. Si mantenemos la pizza en el plato, sin separar los trozos, y hacemos un nuevo corte de lado a lado, podemos obtener como máximo cuatro porciones de pizza. Si hacemos tres cortes de lado a lado a una pizza, sin separar los trozos, ¿cuántas porciones de pizza podemos obtener como máximo? ¿Y con cuatro cortes? ¿Y con cinco cortes?
- c) Para acabar cortaremos una sandía. Si con un largo cuchillo la cortamos de lado a lado obtenemos dos trozos de sandía. Si mantenemos unidos los dos trozos de sandía en su posición inicial y hacemos un segundo corte de lado a lado, podemos conseguir como máximo, cuatro trozos de sandía. Si pudiésemos hacer a la sandía tres cortes en lugar de dos, manteniendo unidos en su lugar los trozos, ¿en cuántos pedazos podría quedar partida la sandía, como máximo? ¿Y con cuatro cortes? ¿Y con cinco cortes?
- d) Coloca los resultados anteriores en una tabla como esta,

Número de cortes	0	1	3	4	5	6	7
Trozos de cuerda	1	2					
Trozos de pizza	1	2					
Trozos de sandía	1	2					

Observando los datos, ¿podrías rellenar las dos últimas columnas?

3. JUEGO CON CARTAS

Antía y Xoán están jugando a un "juego de divisibilidad" con diez cartas numeradas del 0 al 9. Colocan por turno una carta en la mesa, siempre a la derecha de la carta colocada anteriormente por su compañero. El objetivo del juego consiste en ir consiguiendo que:

Después de colocar la segunda carta, el número de dos cifras resultante tiene que ser divisible por 2.

Después de colocar la tercera carta, el número de tres cifras resultante tiene que ser divisible por 3.

Después de colocar la cuarta carta, el número de cuatro cifras resultante tiene que ser divisible por 4.

Y así sucesivamente. Ellos siguen colocando cartas hasta que uno de los dos no puede poner otra que cumpla las normas del juego.

Tenemos aquí un ejemplo de juego:

Antía pone el 5. Xoán coloca el 8 para hacer 58, que es múltiplo de 2. Antía pone luego el 2 para tener 582, que es múltiplo de 3. Xoán coloca entonces el 0 y tenemos 5820, que es un múltiplo de 4. Antía tendría ahora que escoger 1,3,4,6,7 ó 9 para hacer un múltiplo de 5. Como no puede, Xoán gana.

- a) En esta partida ha comenzado Antía y han puesto las cartas 540. ¿Qué número o números pueden ponerse a continuación? ¿Quién ganaría esta partida? Justifica tus respuestas.
- b) Ahora ha comenzado a jugar Xoan y han puesto las cartas 28. ¿Qué número o números pueden ponerse a continuación? ¿Quién ganaría esta partida? Justifica tus respuestas.

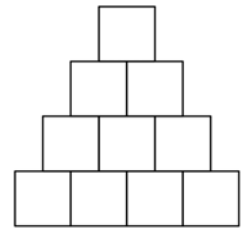
Ahora deciden jugar juntos para intentar formar el número más largo posible, siempre cumpliendo las reglas del juego. Rápidamente llegan hasta el número de cinco cifras 12365.

- c) ¿Piensas que podrían hacer este número más largo con las cartas que les quedan? ¿Cuándo tendrían que parar?
- d) ¿Sería posible usar las diez cartas para formar un número de 10 cifras que cumpla las condiciones del juego? Razona tu respuesta.

4. TORRES

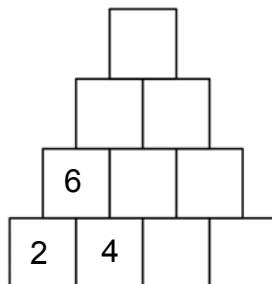
Tenemos una torre que está formada por 4 cuadrados en la base (primer piso), en el segundo piso hay 3 cuadrados, en el tercero 2 y en el último 1, como indica la figura.

En cada torre vamos a colocar unos números de acuerdo con las siguientes reglas:



1. Se empieza a rellenar por la casilla de la izquierda del primer piso y se pone un número, el que quieras.
2. A continuación se completa el primer piso de manera que en cada casilla se pone el doble del anterior.
3. Cuando se acaba el primer piso se empieza a rellenar el segundo, de modo que en cada casilla se pone la suma de las dos que tiene debajo.
4. Y se sigue así con todos los pisos hasta completar la torre.

- a) En la torre que te ponemos a continuación hemos elegido el primer número el 2. Rellena todas las casillas de acuerdo con las reglas anteriores.



- b) Si sumas todos los números que hay en la torre, ¿se tiene un cuadrado perfecto? El 144 es un cuadrado perfecto porque $144=12^2$, pero 32 no es cuadrado perfecto porque no hay ningún número natural que elevado al cuadrado de 32.
- c) ¿Cuál es el menor número por el que tienes que empezar para que la suma de todos los números de la torre sea un cuadrado perfecto?
- d) Ahora vamos a trabajar con una torre de 5 pisos, ¿Cuál es el menor número por el que tienes que empezar para que la suma de todos los números sea un cuadrado perfecto?
- e) ¿Has observado que el último piso es siempre una potencia de 3 por un número? ¿Qué número? ¿Sabrías justificar por qué?

5. TARJETAS NUMERADAS

Alex y Bea tienen 10 tarjetas numeradas con los números 1, 2, 3,... 10. Juegan a un juego en el que uno de ellos debe usar **tres de las tarjetas** para obtener la suma que diga su compañero.

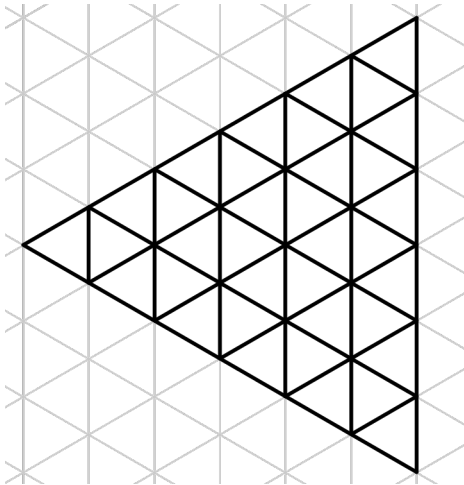
Por ejemplo, si Álex dice: 6, entonces Bea debe encontrar tres tarjetas que sumen 6. En este caso, debería escoger las tarjetas la 1, 2, 3.

- a) Bea dice: 7. ¿Qué tarjetas puede escoger Álex?
- b) Quitamos cinco de las diez tarjetas y Álex dice: 8. Bea se da cuenta entonces de que puede sumar el número 8 con tres tarjetas de dos formas distintas. ¿Qué tarjetas habíamos quitado al principio?
- c) Quitamos una de las 10 tarjetas y Bea dice: 10. Álex se da cuenta entonces de que puede sumar el número 10 con tres tarjetas de una sola forma. ¿Qué tarjeta habíamos quitado al principio?
- d) Quitamos una tarjeta y Álex dice: 25. Bea no puede encontrar ninguna combinación de tres tarjetas para que sume 25. ¿Qué tarjeta habíamos quitado al principio?
- e) Quitamos una de las 10 tarjetas y Bea dice: 16. Álex se da cuenta entonces de que puede sumar el número 16 de seis formas distintas. ¿Qué tarjeta hemos quitado?

1. TRIÁNGULOS CON TRIÁNGULOS

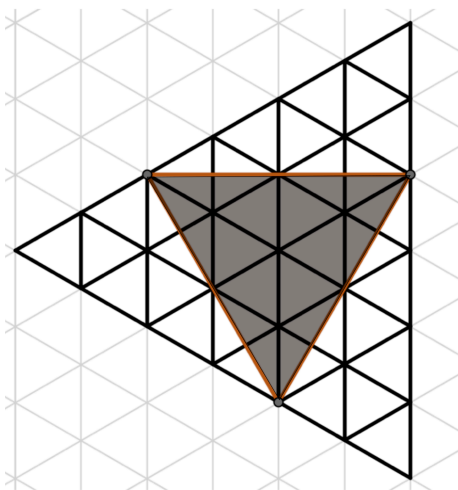
Un triángulo equilátero de área 36 cm^2 , está dividido en 36 triángulitos de 1 cm^2 , como en las figuras siguientes.

a) Dibuja sobre esta figura un triángulo de área 8 cm^2



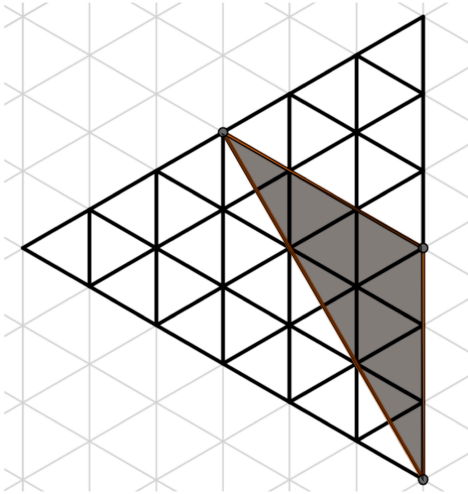
Calcula **razonadamente**, en cada caso, el área de los triángulos sombreados, **explicando cómo lo has hecho**:

b)

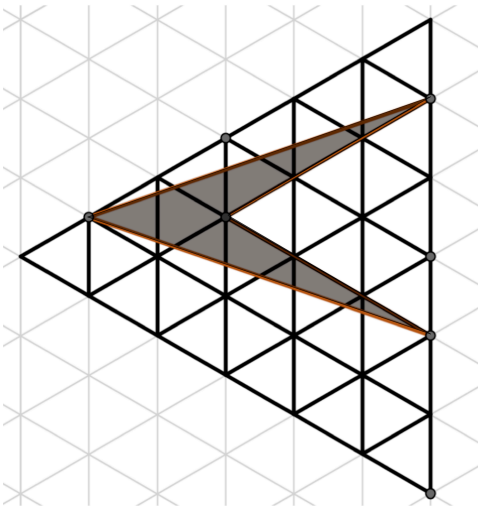


(Continúa detrás)

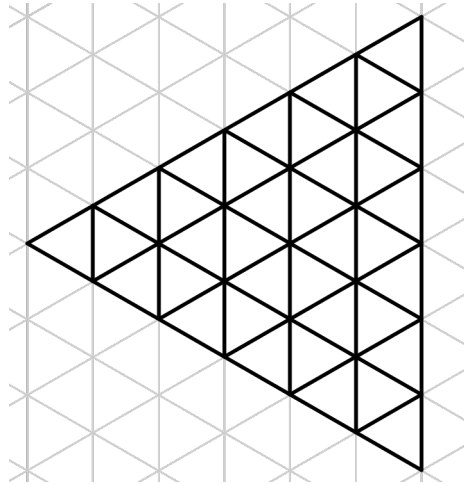
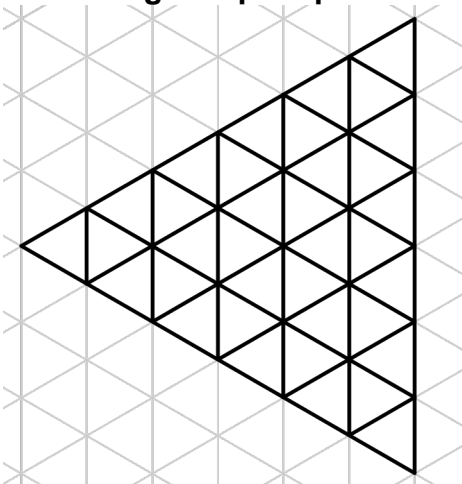
c)



d)



Más triángulos para practicar:



2. LA RANA SALTARINA

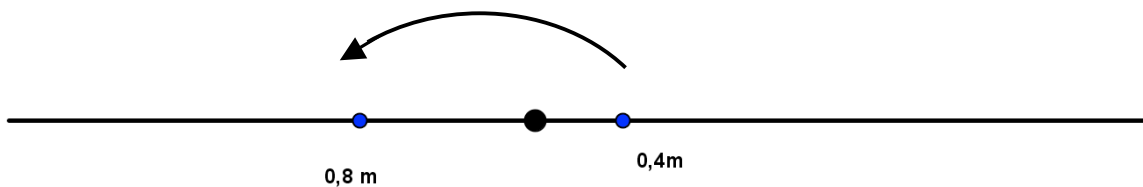
«Identificador»



En esta línea recta hay una rana que salta, alternadamente hacia la derecha y hacia la izquierda del punto negro, sin caer nunca en él. Lo hace de la siguiente forma:

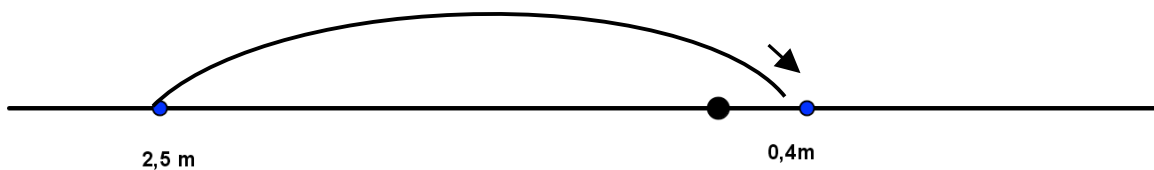
- Si la rana se encuentra a una distancia d inferior o igual a un metro del punto negro, tras dar su siguiente salto estará sobre la recta al doble de esa distancia del punto negro, o sea a $2d$ metros, pero en el lado opuesto.

Por ejemplo, si la rana está a la derecha del punto negro a una distancia $d = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ m}$, dará el salto a la izquierda para caer a una distancia $2d = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ m}$ del punto negro.



- Si la rana se encuentra a una distancia d superior a un metro del punto negro, tras dar su siguiente salto estará sobre la recta a una distancia igual a $1/d$ del punto negro, pero en el lado opuesto.

Por ejemplo, si la rana está a la izquierda del punto negro a una distancia $d = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ m}$, dará el salto a la derecha para caer a una distancia $\frac{1}{d} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ m}$ del punto negro.



Pues bien, responde a las siguientes preguntas y en todas tus respuestas indica a qué distancia y en qué lado del punto negro se encontrará la rana:

- a) Si inicialmente estaba a la izquierda del punto negro y a una distancia de 0,05 metros, ¿dónde se encontrará exactamente tras dar dos saltos?

(Continúa detrás)

b) ¿Y dónde se encontrará exactamente tras dar cinco saltos?

c) ¿Y tras dar diez saltos?

d) No te asustes, piensa un poco: ¿Y tras 2016 saltos? Explica tu respuesta.

e) Ahora queremos que nos digas en qué lado del punto negro y a qué distancia de él empezó la rana su periplo saltarín si después de **tres** saltos la rana se encuentra a la derecha y a 0,8 m del punto negro. **Indica razonadamente todas las soluciones posibles.**

3. EN LA PAPELERÍA

En una papelería venden estuches de tres tamaños, pequeños, medianos y grandes. Los precios son números enteros positivos, es decir no tienen decimales y están ordenados de acuerdo con el tamaño de los estuches.

Por ejemplo, unos precios válidos serían que un estuche pequeño costara 5 euros, uno mediano 8 euros y uno grande 9 euros. Y ejemplos de precios que **no** valen son: que un estuche cualquiera cueste 8,75 euros o que uno pequeño cueste 6 euros si el mediano cuesta 4 euros.

María, Ana y Elena fueron ayer a la papelería y compraron 9 estuches pequeños, 6 medianos y 8 grandes para regalar a toda su clase.

- a) ¿Cuánto les costarían los estuches si los precios son 2, 4 y 5 euros? Intenta dar una expresión general para cualquier precio de los estuches.

Cuando recibieron la cuenta se produjo la siguiente conversación:

María dijo: mira, el total es un número par.

Ana dijo: y también es un múltiplo de tres.

Elena dijo: entre las tres tenemos que pagar menos de 90 euros.

- b) ¿Puede haber un estuche pequeño que cueste 3 euros?

- c) ¿Puede haber un estuche grande que cueste 5 euros?

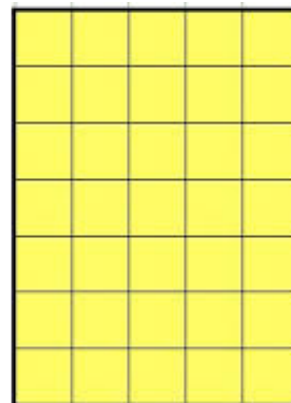
(Continúa detrás)

- d) ¿Puede haber un estuche mediano que cueste 10 euros?
- e) El precio de un estuche pequeño no puede ser cualquier número. ¿Qué condición tiene que cumplir el precio de un estuche pequeño?
- f) El precio de un estuche grande tampoco puede ser cualquier número. ¿Qué condición tiene que cumplir el precio de un estuche grande?
- g) ¿Puede haber un estuche grande que cueste 9 euros?
- h) Podrías decirnos exactamente ¿cuánto cuesta cada estuche?

4. RECTÁNGULOS Y BLOQUES

«Identificador»

Carlos, Diana y Elena ponen fichas cuadradas sobre una mesa formando rectángulos, cuyos lados quedan orientados a los cuatro puntos cardinales. Tienes un ejemplo en la figura de la derecha.



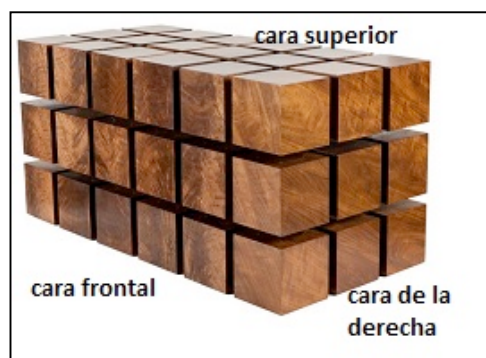
a) Carlos, Diana y Elena han construido un rectángulo, distinto y mayor que el de la figura. Una vez hecho, Carlos se lleva a su bolsillo las 7 fichas del rectángulo que estaban en el lado sur. Después, del nuevo rectángulo que ha quedado con las fichas restantes, Diana suprime las fichas del lado este, que son 10. Si a continuación Elena quiere recoger las fichas del lado Norte ¿cuántas serán? Y después de que Elena las recoja, ¿cuántas fichas quedarán sobre la mesa?

b) ¿Crees que si se empieza con otros rectángulos, de manera que se cambien los números 7 y 10 por otros números, siempre se podrá saber cuántas fichas recoge Elena y cuántas quedan al final sobre la mesa?

c) Ahora Carlos, Diana y Elena construyen bloques con un montón de pequeños cubos, como en la figura de la derecha.

Carlos, Diana y Elena construyen ahora un bloque, distinto y mayor que el de la figura.

Carlos separa todos los cubos de la cara frontal y se da cuenta que son 77.



Después Diana quita todos los cubos que quedan en la cara de la derecha y son 55.

(Continúa detrás)

Si a continuación Elena quiere eliminar todos los cubos que quedan en la cara superior, ¿puedes deducir cuántos serán?

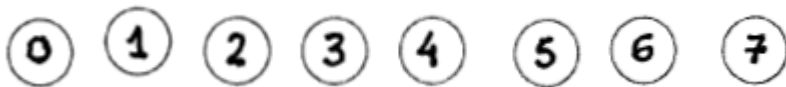
¿Cuántos cubos quedarán en el bloque formado por los cubos restantes después de que Carlos, Diana y Elena supriman los cubos indicados?

d) Para otro bloque Carlos dice que ha sacado un cierto número de cubos de la cara frontal y después Diana dice otro número para la cara de la derecha. Enseguida Elena dice “estos números de cubos que decís no son posibles”. Da un ejemplo de números que erróneamente, puedan haber dicho Carlos y Diana pero que no puedan ser ciertos y explica las razones que te llevan a tu respuesta.

e) En otros casos, para ciertas dimensiones del bloque inicial, no es posible deducir con seguridad cuántos cubos quedan en la cara superior sabiendo los que ha quitado Carlos de la cara frontal y los que ha quitado después Diana de la cara de la derecha, ya que se presentan diversas posibilidades. Busca unos números (para sustituir el 77 y el 55 del apartado c) para los cuáles no sea posible, sólo con estos datos, deducir exactamente el número de cubos que quitará Elena después de que lo hagan Carlos y Diana.

5. PULSERAS

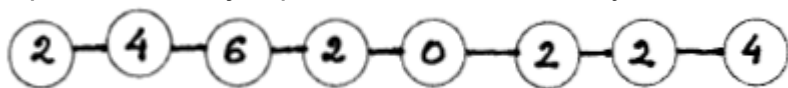
Tienes muchas fichas, tantas como necesites, numeradas del 0 al 7:



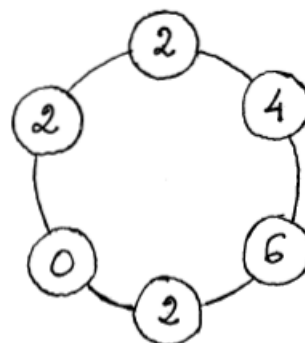
Con ellas vamos a hacer pulseras. Estas son las reglas:

- 1) Elige dos de ellas para comenzar. Pueden tener el mismo número.
- 2) Para elegir la tercera, suma los números de la primera y la segunda. Si te sale menos de 8 elige la ficha con el número que te ha salido. Si te sale 8 o más, réstale 8 y elige la ficha que te haya salido de la resta.
- 3) Para elegir la cuarta se hace lo mismo que antes, con la segunda y la tercera fichas.
- 4) Continúa hasta que se vuelvan a repetir las dos primeras fichas en el mismo orden que se pusieron al principio.
- 5) Estas dos fichas repetidas no se utilizarán para hacer la pulsera y se devuelven al montón.
- 6) Con las fichas que quedan unidas, sin cambiar el orden, se confecciona una pulsera.

Aquí tienes un ejemplo comenzando con 2 y 4:



Al repetirse de nuevo el 2 y el 4, este 2 y este 4 se devuelven al montón, y con las fichas que ya teníamos 2, 4, 6, 2, 0 y 2 se forma una pulsera. Como hay seis cuerdecitas que unen las fichas, decimos que esta pulsera tiene longitud 6.



Ten en cuenta que como la pulsera es cerrada se puede comenzar por cualquier lugar. Por ejemplo, la pulsera anterior es la misma que la que comienza por 6 y 2, y la misma que si empezamos por 2 y 2.

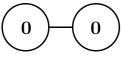
- a) Dibuja la pulsera comenzando con 0 y 1. ¿Qué longitud tiene? Si comienzas por 5 y 5 ¿se obtiene una pulsera diferente?

- b) ¿De cuántas formas distintas se puede empezar la pulsera del apartado a)?

(Continúa detrás)

«Identificador»



- c) Exceptuando la pulsera  , ¿qué longitud tiene la pulsera más pequeña? ¿Por qué?
- d) ¿De cuántas formas diferentes se puede comenzar una pulsera?
- e) ¿Cuántas pulseras diferentes se pueden hacer? Dibújalas todas y justifica tu respuesta. No dibujes dos pulseras que aunque las hayas comenzado con dos fichas diferentes sean iguales.

6. LOS CUENTOS DE MI ESTANTERÍA

En mi habitación tengo una estantería, y en una balda, solo en una balda, coloco mi colección de cuentos.

Tengo 4 cuentos, 2 tienen las tapas de color ROJO, uno tiene las tapas de color AZUL y el otro tiene las tapas de color VERDE. Para facilitar nuestra organización y distinguirlos bien en lugar de fijarnos en el título los vamos a llamar así: **R1, R2, A1 y V1**. La letra hace referencia al color y el número sirve para clasificar los cuentos de ese color.



Los cuentos los vamos a colocar en una balda de la estantería de manera que no puede haber **dos cuentos seguidos del mismo color**.

Por ejemplo, una ordenación posible es: **R1, A1, R2, V1**.

Y esta ordenación es distinta de esta otra: **R2, A1, R1, V1** ya que los cuentos de tapas rojas están cambiados entre sí y como tienen títulos distintos es una ordenación distinta.

- a) Escribe otra ordenación posible para estos cuatro cuentos sin que haya dos seguidos del mismo color.

- b) Escribe todas las posibles ordenaciones de estos cuatro cuentos sin que haya dos seguidos del mismo color.

- c) Mi colección aumenta y ahora tengo 3 cuentos de tapas rojas, uno de tapas azules y uno de tapas verdes: **R1, R2, R3, A1 y V1**. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una balda de manera que no haya dos cuentos juntos del mismo color?

No te pedimos que escribas todas las formas posibles; queremos que digas cuántas maneras de colocar los libros y que expliques como lo has deducido.

(Continúa detrás)

Otra vez la colección aumenta y tenemos 3 cuentos de tapas rojas, dos cuentos de tapas azules y uno de tapas verdes: **R1, R2, R3, A1, A2 y V1**.

- d) ¿Cuántas formas diferentes tenemos para colocarlos sin que haya dos cuentos seguidos del mismo color si el primer cuento que coloco en la balda es el cuento **R1**?

- e) ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar los tres cuentos de tapas rojas, los dos de tapas azules y el de tapas verdes en una balda de manera que no haya dos cuentos seguidos del mismo color?

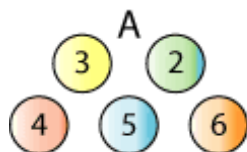
Tampoco te pedimos que escribas todas las formas posibles, sólo queremos que digas cuántas maneras de colocarlos hay.

- f) Si tuviéramos 5 cuentos de tapas rojas, 3 de tapas azules y 2 de tapas verdes ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar sin que haya dos cuentos juntos del mismo color?

En este apartado no es necesario que hagas todos los productos, basta con que lo dejes indicado.

1. JUEGO CON BOLAS

Tenemos una bolsa **A** de bolas numeradas que empleamos para un juego:



Para jugar, las bolas se mezclan y se eligen dos al azar. Por ejemplo:

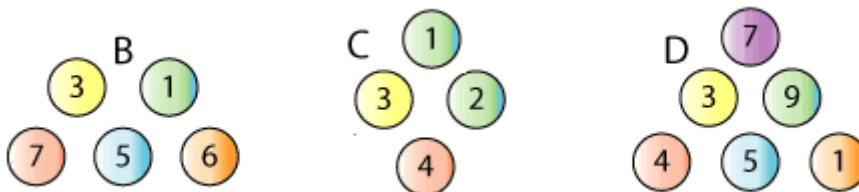


Luego se suman los números de las dos bolas elegidas: $4+5=9$

Si la suma es par, ganas. Si es impar, pierdes.

a) Un juego se dice que es **justo** si el número de parejas que te hacen ganar es el mismo que el número de parejas que te hacen perder. ¿Puedes justificar si el juego con la bolsa A es justo o no?

Tenemos ahora tres nuevas bolsas de bolas: B, C y D:



b) Ahora te dejan escoger entre las bolsas B, C y D. En cada caso haz el recuento de cuántas parejas de números puedes extraer y cuántas de ellas te hacen ganar. A la vista de tus cálculos, explica cuál de las tres bolsas escogerías para que tu posibilidad de ganar sea la mayor posible.

(Continúa detrás)

c) ¿Crees que podrías construir una bolsa con bolas numeradas que diese lugar a un juego justo? Explica tu respuesta.

d) ¿Sería posible construir una bolsa con 10 bolas numeradas que diera lugar a un juego justo? Explica tu respuesta.

2. EL PALACIO DE LAS HADAS

Las hadas viven en un palacio que tiene muchos pisos numerados así:
1,2,3,4,5.....

Para ir de un piso a otro piso hay que utilizar una varita mágica y en cada piso hay dos varitas mágicas, una es roja y la otra es azul.

Si tocas la varita mágica roja puedes ir 10 pisos más arriba o 10 pisos más abajo. Por ejemplo, si estás en el piso 37 y tocas la varita roja puedes ir al piso 47 o al piso 27.



También puedes tocar la varita azul. Si la tocas puedes subir a otro piso que es el triple del piso que estás más uno, por ejemplo, si estás en el piso 5 puedes ir al piso $16=3 \cdot 5 + 1$. También puedes moverte en sentido contrario cuando esto sea posible, por ejemplo, si estás en el piso 13 podrías ir al 4 porque $13=3 \cdot 4 + 1$.

a) El hada del Bosque vive en el piso 1. ¿Crees que podría llegar al piso 13? ¿Podría ir al piso 40? ¿Y al piso 93? ¿Y al piso 57? Si puede llegar a uno de estos pisos explica qué varitas ha tocado y en qué orden. Si crees que no puede llegar explica por qué.

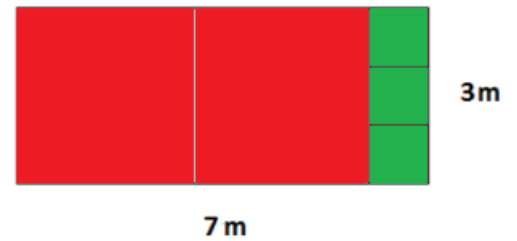
b) ¿Podrías decir alguna propiedad que cumplan los números de todos los pisos a los que puede llegar el hada del Bosque?

(Continúa detrás)

- c) El hada de la Luna vive en la planta 2. Describe cómo puede llegar el hada de la Luna a la planta 57.
- d) El hada del Agua vive en el piso 18. Utilizando la varita roja y la varita azul, ¿podría llegar el hada del Agua al piso 5?
- e) ¿Pueden coincidir dos de estas tres hadas en algún piso? Si piensas que **SÍ** dinos el piso, cuáles son las hadas que coinciden en él y como llegarían. Si piensas que **NO** escribe una justificación.

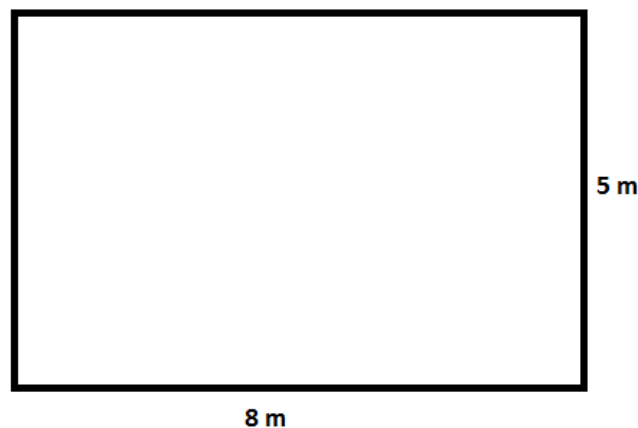
3. EMBALDOSANDO UNA PARED

Queremos embaldosar una pared rectangular de 3m por 7m, utilizando exclusivamente baldosas cuadradas que sean de longitudes enteras, no necesariamente iguales y con el mínimo número total de ellas.

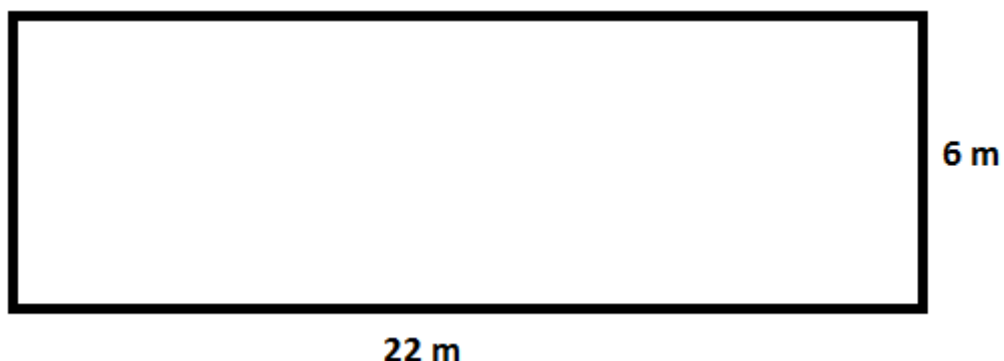


El número mínimo total en este caso sería de 5 losas cuadradas, ya que necesitaríamos 2 azulejos de lado 3m (coloreados de color rojo) y 3 azulejos de lado 1m (coloreados de color verde). Un posible diseño sería el que se muestra en la figura de arriba, aunque hay otros más.

- a) Si ahora queremos embaldosar una pared rectangular de 8m por 5m, con el mismo criterio anterior, ¿cuál es el número mínimo de baldosas cuadradas que necesitarías en total y de qué tamaño serían? **Dibuja algún diseño con ellas como ejemplo.**

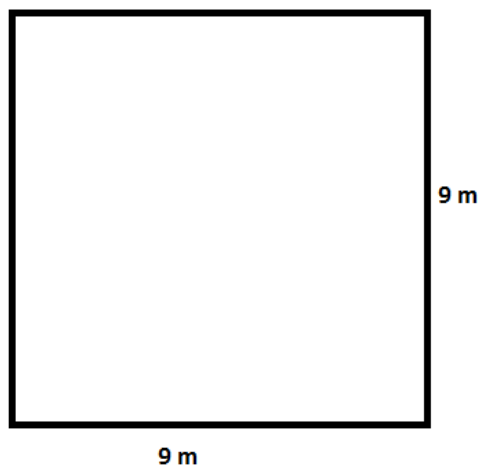
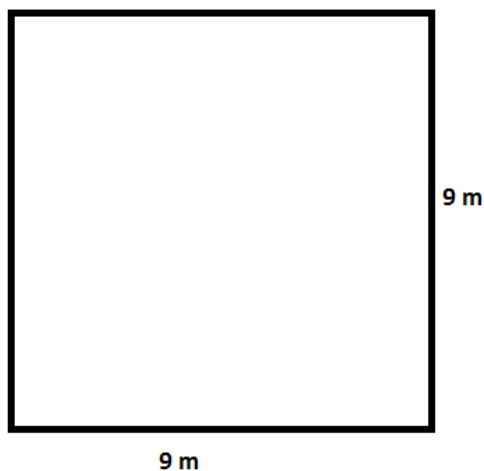


- b) Con sólo baldosas cuadradas de lados 2m, 4m y 6m, ¿cuál es el número mínimo de baldosas cuadradas que necesitarías en total y de qué tamaño serían para embaldosar una pared de 22m por 6m? **Dibuja algún diseño con el número de baldosas encontrado.**



(Continúa detrás)

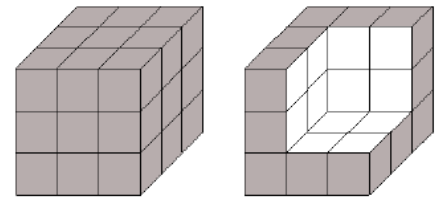
- c) Si ahora la pared es cuadrada de lado 9 m, y sólo disponemos de baldosas cuadradas de lado 1, 2, 4, 5 y 7m, podemos encontrar el número mínimo de baldosas de dos formas distintas. **Encuéntralas y realiza un diseño con cada una de estas dos posibilidades.**



- d) Ahora podemos usar losas cuadradas de lados enteros y de lados decimales con el 5 como único decimal, por ejemplo 0'5, 1'5, 2'5,...,15'5, 16'5... Si disponemos de una pared de 371'25 m², y para embaldosarla usamos como la mayor baldosa, una sola baldosa cuadrada de 16'5m de lado, **¿cuál sería el número mínimo de baldosas que permitirían realizarlo?**

4. PINTANDO CUBOS Y CUBITOS

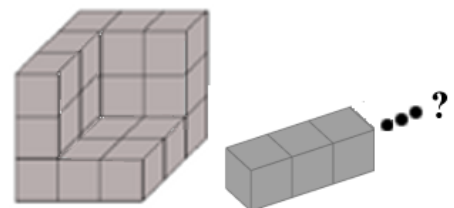
Hemos necesitado exactamente 9 botes de pintura para pintar exteriormente (por todas sus caras, también las que no se ven, como la lateral izquierda, la trasera y la inferior) el cubo de la izquierda que, como se ve, está construido adosando cubitos todos iguales.



Después hemos quitado unos cuantos cubitos para dejar la figura como se ve a la derecha.

- a) ¿Cuántos botes de pintura necesitaremos para pintar completamente la parte de la figura que no lo está?

Ahora ya tenemos esta figura pintada exteriormente (recordad que también por la izquierda, por detrás y por debajo). Vamos a desmontarla y adosando algunos cubitos en la posición que nos vaya mejor, queremos construir una fila de cubitos, en la que queremos pintar todas las caras exteriores que no lo estén, también las de la cara inferior.

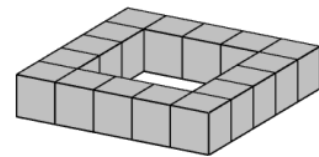
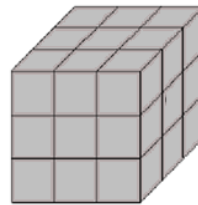


Tenemos un solo bote de pintura como los del apartado a).

- b) ¿Cuál es el máximo número de cubitos que podremos poner en la fila para que la podamos pintar completamente? Explica cómo los tienes que colocar.

(Continúa detrás)

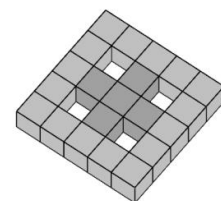
Tenemos otro cubo como el inicial, completo y pintado exteriormente por todas sus caras, lo desmontamos y ahora queremos adosar adecuadamente algunos cubitos (algunos de los cuales tienen caras pintadas) para construir un nuevo objeto: un "cuadrado de cubitos" y pintarlo, como se ve en la figura de la derecha.



Queremos pintar todas las caras exteriores (también las de la cara inferior) del nuevo objeto, pero lo podemos montar de manera que aprovechemos piezas con algunas caras pintadas, tantas como sea posible (que ya no volveremos a pintar, naturalmente).

c) Razona cuál es el menor número de caras que tendremos que pintar.

Con las piezas que nos han sobrado queremos añadir una cruz al cuadrado y que quede pintada en todo su exterior (también la cara inferior), como muestra la figura de la derecha.



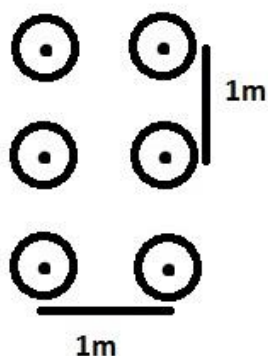
También la montaremos intentando aprovechar, de los cubitos que nos han quedado sin utilizar, aquellos que tengan caras ya pintadas y que podemos añadir ahora a la construcción.

d) ¿Cuál es el menor número de caras que tendremos que pintar en la cruz que añadimos?

6. SEMBRANDO SEMILLAS

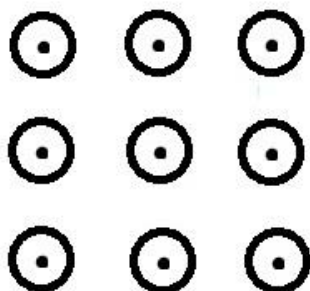
Un agricultor se dispone a sembrar semillas de patatas en su terreno.

El primer día, el agricultor siembra tres semillas en línea recta separadas 1 metro entre cada dos consecutivas (como se indica en la figura de la derecha).



El segundo día, vuelve a sembrar otras tres semillas en una línea paralela a la anterior a distancia 1 metro y también a distancia 1 metro entre cada nueva semilla (como se indica en la figura de la izquierda).

Tras la siembra del tercer día, el campo queda de la siguiente forma:



- ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?
- ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?
- Llamamos orden de una semilla al número de cuadrados que tienen alguno de sus vértices en dicha semilla. ¿Cuál es el orden de cada una de las semillas?
- ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

El agricultor sigue cultivando tres semillas cada día con la misma distribución anterior. Tras la siembra del cuarto día,

- ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?
- ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?

(Continúa detrás)

g) ¿Cuál es el orden de cada una de las semillas?

h) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

Si han pasado 100 días, responde justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas:

i) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

j) ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?

k) ¿Cuál es el orden de cada una de estas semillas?

l) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

Si han pasado “n” días (n representa cualquier valor de los días de siembra), responde justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas:

m) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

n) ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?

ñ) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

1. ATRAVESANDO EL RIO

En una de las orillas de un río hay 3 adultos, 2 niños y una barca de remos muy pequeña. Queremos que todas las personas crucen el río utilizando la barca. En la barca sólo caben o bien un solo adulto o bien 2 niños. Todos saben remar y está permitido que un niño vaya solo en la barca.

Si entendemos por "viaje" a remar de un lado al otro del río:

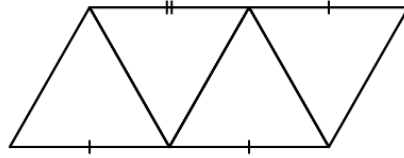
- a) ¿Cuál es el mínimo número de viajes que habrá que hacer para que todas las personas crucen el río? Explica cómo has llegado al resultado.
- b) ¿Y si hubiera 8 adultos y 2 niños? ¿Y si hubiera 100 adultos y 2 niños? Explica cómo has llegado a tus respuestas.
- c) Explica cómo podemos encontrar el mínimo número de viajes necesarios para cualquier número de adultos y 2 niños.

(Continúa detrás)

- d)** Si ahora, en una de las orillas, hay 4 adultos y 3 niños, ¿cuál es el número mínimo de viajes que habrá que hacer para que todas las personas crucen el río? ¿Cómo los harías?
- e)** ¿Y si hubiera 8 adultos y 3 niños? ¿Y si hubiera 100 adultos y 3 niños? Explica cómo podemos encontrar el mínimo número de viajes necesarios para cualquier número de adultos y 3 niños.
- f)** Explica cómo podemos encontrar el mínimo número de viajes necesarios para cualquier número de adultos y cualquier número de niños.

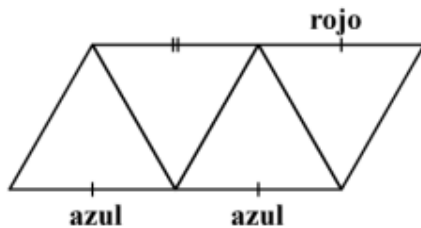
2. COLOREANDO TRIÁNGULOS

Ana y Carlos juegan a colorear de azul, rojo o verde los lados de los triángulos del siguiente dibujo



y lo deben hacer de forma que, en cada uno de los cuatro triángulos, los tres lados sean de distinto color. Primero, Ana colorea los tres lados que tienen una marca de un trazo y después. Carlos debe decir de qué color puede ser el lado que tiene una marca con dos trazos, para que se cumpla la condición de antes.

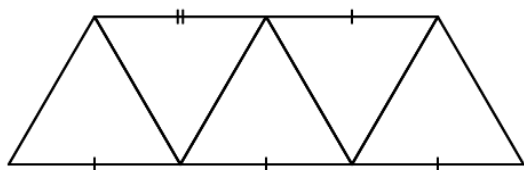
- a) Razona qué color puede decir Carlos, si Ana ha usado los colores que se indican en la figura siguiente.



- b) ¿Qué color podría decir Carlos si Ana pintara inicialmente esos tres lados del mismo color? Razona tu respuesta.
- c) Carlos le dice a Ana: "pongas los colores que pongas yo siempre podré encontrar un color válido para el lado con dos trazos". ¿Es verdad lo que dice Carlos? En algún caso, ¿puede haber más de un color que pueda decir Carlos? Razona tus respuestas.

(Continúa detrás)

d) A continuación Ana le dice a Carlos: "si pongo un triángulo más, entonces yo podré poner colores a cuatro lados de forma que tú no puedas encontrar solución".



Busca una de estas posibilidades en las que Ana colorea los cuatro lados que tienen un trazo y después Carlos no puede acabar el juego porque no puede encontrar un color para el lado con dos trazos.

3. LA MÁQUINA DE LOS NÚMEROS

Tenemos una máquina en la que sólo podemos meter números naturales 1; 2; 3; etc. Esta máquina primero eleva al cuadrado el número que hemos metido y después, con el resultado obtenido, suma todas las cifras todas las veces que haga falta hasta quedarnos con una sola cifra y nos devuelve esta cifra.



Por ejemplo, si metemos el número 16, primero eleva al cuadrado, $16^2 = 16 \times 16 = 256$ y luego suma sus cifras, lo que da $2 + 5 + 6 = 13$. Como tiene que quedar una sola cifra, vuelve a sumar las cifras del número 13 y obtiene $1 + 3 = 4$. Por tanto, si metemos el número 16, la máquina nos devuelve el número 4.

- a) ¿Qué número nos devolverá si metemos el número 26?

- b) ¿Puedes dar un ejemplo de un número de 2 cifras que puedas meter en la máquina para que el número que nos devuelva sea 7? ¿Y de 3 cifras? ¿Y si te pidieran un número con cualquier número de cifras?

- c) Metemos un número en la máquina y ésta nos devuelve el número 9. Si ahora metemos en la máquina el número consecutivo al que habíamos metido, ¿puede la máquina devolvernos también el 9? Si la respuesta es afirmativa, explica por qué. Si es negativa, explica cuántos números más tenemos que avanzar para que el resultado que devuelve la máquina vuelva a ser 9.

(Continúa detrás)

- d)** ¿Puedes meter algún número en la máquina para que ésta nos devuelva el número 5? Explica tu razonamiento.
- e)** ¿Qué resultado nos devolverá la máquina si metemos el número 201820182018? Explica tu razonamiento.
- f)** Si modificamos la máquina y en el primer paso eleva al cubo (el cubo de 25 es $25 \times 25 \times 25$) el número en vez de elevarlo al cuadrado, ¿sabrías decir qué resultado dará si partimos del número 20182018? Explica tu respuesta.
- g)** ¿Serías capaz de construir una máquina suficientemente original a la que al meterle cualquier número natural 1, 2, 3, 4, etc., nos devuelva siempre el número 1 o el 2 o el 3?

4. LA EMPRESA DE MAFALDA



Mafalda es la directora de la empresa ALMATEST que se dedica a gestionar los ahorros de sus clientes. La empresa tiene 20 clientes destacados a los que ha numerado en orden de importancia empezando por el 1.

Cada día visita a uno y solo a uno de estos clientes. Un cliente amenaza con retirar sus ahorros de ALMATEST si Mafalda no le ha visitado nunca, o si ha visitado a alguien menos importante que él desde la última vez que le visitó.

Cada día Mafalda va a visitar al cliente más importante que amenaza con retirar sus ahorros. El primer día visita al cliente 1, el segundo día al cliente 2, el tercer día tiene que visitar al cliente 1 porque es el cliente más importante que amenaza con retirar sus ahorros y así sucesivamente.

¡Cuando ninguno de sus clientes amenace con retirar sus ahorros Mafalda se tomará unas vacaciones!

a) Completa la siguiente tabla que tiene los 15 primeros días de la agenda de Mafalda:

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cliente visitado	1	2	1	3											

b) Continúa la tabla anterior hasta el día 32:

Día	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Cliente visitado																	

(Continúa detrás)

c) ¿Cada cuántos días visita al cliente número 2? ¿Cada cuántos días visita al cliente número 3?
¿Dada cuántos días visita al número 4?

d) ¿Qué día visitará por primera vez al cliente número 20?

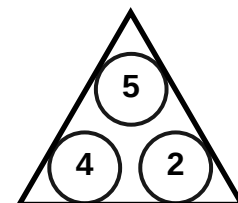
e) A lo largo de este periodo de trabajo, que va hasta que Mafalda se toma sus primeras vacaciones, ¿cuántas veces amenaza con retirar sus ahorros el cliente número 1? ¿Y el número 2? ¿Y el número 4?

1. TRICÁLCULOS

En este problema sólo pueden utilizarse números naturales (1, 2, 3, 4, etc.). Sobre un triángulo como el del dibujo situamos tres números en los tres círculos. A continuación, realizamos la siguiente operación a la que llamamos el tricálculo de los tres números:

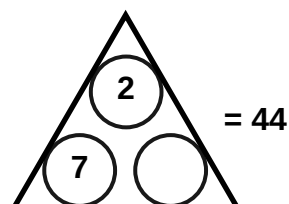
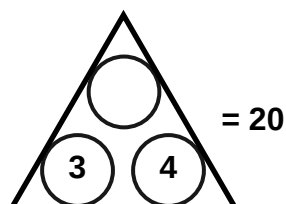
Nº de Abajo Izquierda x Nº de Abajo Derecha + Nº de Arriba

Por ejemplo, en el triángulo de la derecha, el tricálculo de los tres números vendrá dado por: $4 \times 2 + 5 = 13$.

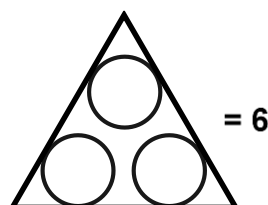


Responde las siguientes cuestiones:

a) Completa los siguientes triángulos para que sus tricálculos sean los indicados:



b) ¿Cuántos triángulos existen cuyo tricálculo da como resultado 6? Debes tener en cuenta que los números de los vértices pueden repetirse y que dos triángulos son diferentes si sus números están colocados en diferentes círculos, aunque sean los mismos números.



c) Recuerda que los cuadrados perfectos son los números que puedes expresar como el cuadrado de un número natural, es decir: 1, 4, 9, 16, etc. Si en los vértices de abajo ponemos dos números consecutivos (seguidos), ¿cuál es el número más pequeño que podemos poner en el vértice de arriba para conseguir un cuadrado perfecto como resultado del tricálculo? Explica por qué crees que no hay uno más pequeño.

(Continúa detrás)

d) Si en los números de abajo ponemos un número y su triple, ¿qué número pondremos en el vértice de arriba para conseguir un cuadrado perfecto como resultado del tricálculo?

e) ¿Existen tres números **distintos** que al ponerlos en cualquier orden en el triángulo siempre dé como resultado el mismo tricálculo? Razona tu respuesta.

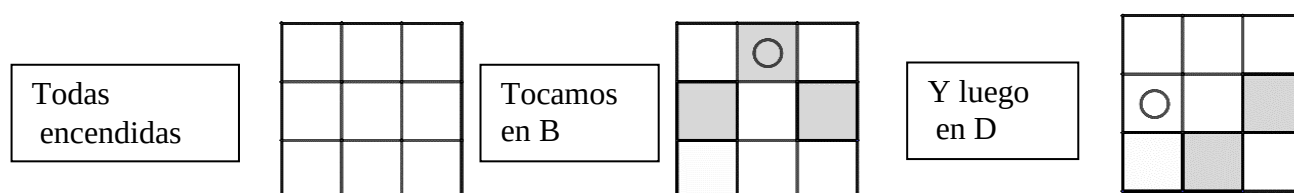
2. ILUMINACIÓN EN EL MUSEO CARRÉ

El museo Carré tiene forma de cuadrado y tiene 9 salas cuadradas iguales, A, B, C, ...

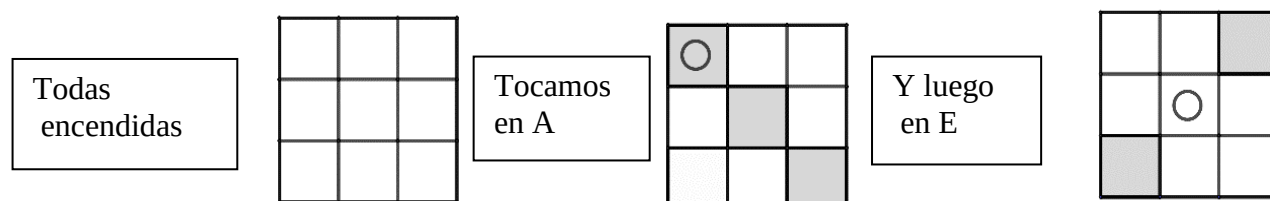
En cada una de ellas hay un interruptor de la luz que enciende o apaga a la vez la luz de esa sala y de las que están en diagonal con ella.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Así si partimos con todas las salas iluminadas y tocamos el interruptor de B, se apagan las salas B, D y F. Si a continuación apretamos el interruptor de D, se encienden D y B que estaban apagadas y se apaga H que estaba encendida. Un esquema posible de la secuencia **B→D** es:



Con todas las salas iluminadas, si tocamos en A se apagan A, E e I. Si a continuación tocamos en E, se encienden A, E e I, y se apagan C y G. Así pues, la secuencia **A→E** es:



En todos los apartados del problema partimos de que todas las salas del museo comienzan estando iluminadas.

a) ¿Razona qué ocurre si tocamos el mismo interruptor dos veces seguidas?

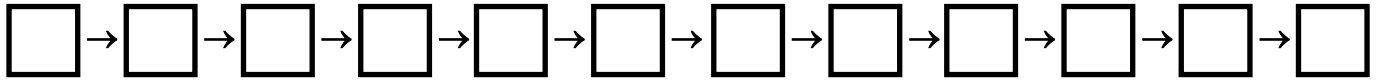
b) Si tocamos dos interruptores distintos, ¿importa el orden en que lo hagamos? Razona tu respuesta.

c) Escribe una secuencia de interruptores ordenada (lo más corta posible) para dejar apagadas todas las salas. (Puedes dejar cuadrados en blanco si no los necesitas, o añadir nuevos si te hacen falta).

□ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □

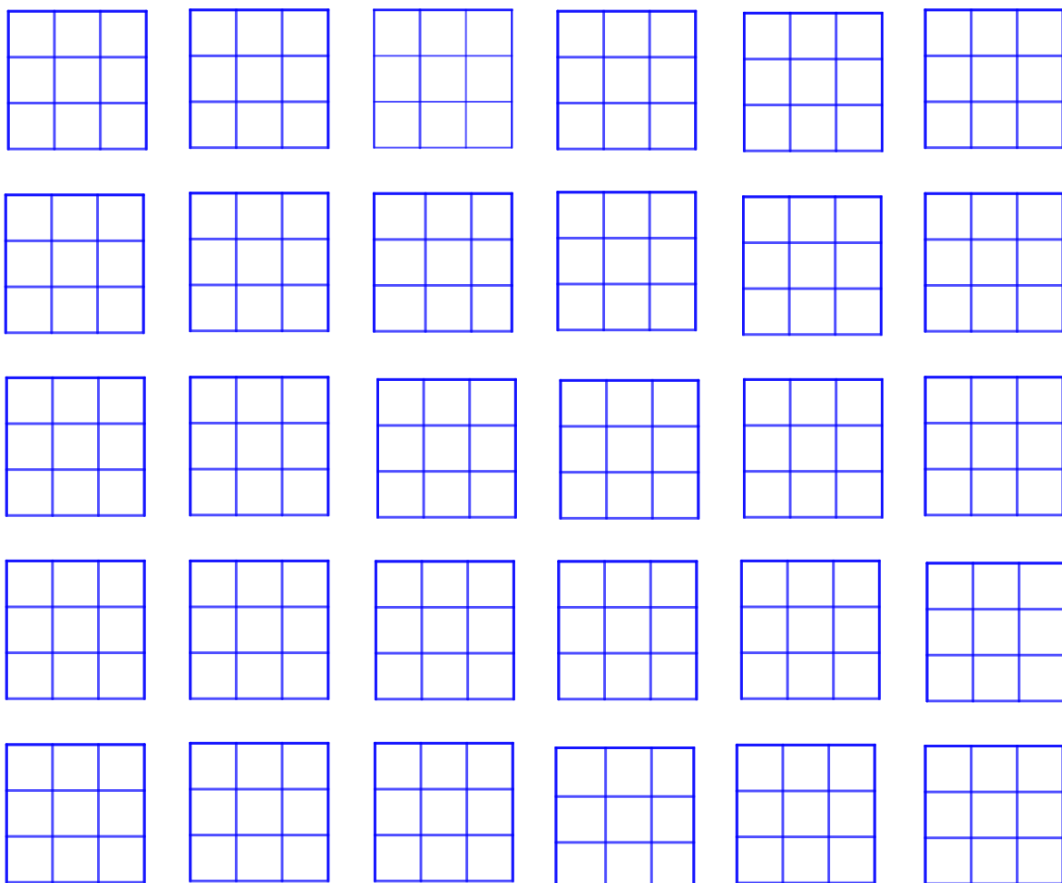
(Continúa detrás)

d) Escribe una secuencia de interruptores ordenada (lo más corta posible) para dejar encendida solo la sala central E. (Puedes dejar cuadrados en blanco si no los necesitas, o añadir nuevos si te hacen falta).



e) Indica, de manera razonada, las salas que pueden acabar estando ellas solas iluminadas y las otras apagadas.

CUADRADOS PARA PRACTICAR



3. REGALO DE CANICAS

Diego y Marta suelen jugar a las canicas por las tardes. Como son muy amigos, deciden intercambiarlas de una forma especial. El primer día, el que tiene más canicas le regala una al otro. El segundo día, el que tiene más canicas le regala 2 de sus canicas al otro, el tercer día el que tiene más canicas le regala tres al otro, y así sucesivamente.



Continúan así todos los días, de forma que cada día, el que tiene más canicas, le regala canicas al otro, pero siempre se regala una más que el día anterior. Por ejemplo, si Marta tuviera 9 canicas y Diego 12, el primer día Marta se iría a casa con 10 y Diego con 11, el segundo día Marta tendría 12 (dos más) y Diego 9 (dos menos), el tercer día Marta tendría 9 (tres menos) y Diego 12 (tres más), ...

- a) Si inicialmente Marta tiene 5 canicas y Diego 6, ¿cuántas canicas tendrá cada uno al cabo de tres días? ¿Cuántos días van a pasar hasta que alguno de los dos se quede sin canicas?
- b) Si Marta tuviera 50 canicas y Diego 51 canicas, ¿cuántos días pasarían hasta que alguno se quedara sin canicas? Explica tu razonamiento.

(Continúa detrás)

c) Da dos ejemplos en los que después del intercambio correspondiente a ese día Marta y Diego se queden con el mismo número de canicas. ¿Puede ser después del primer día? ¿Puede ser después del segundo día?

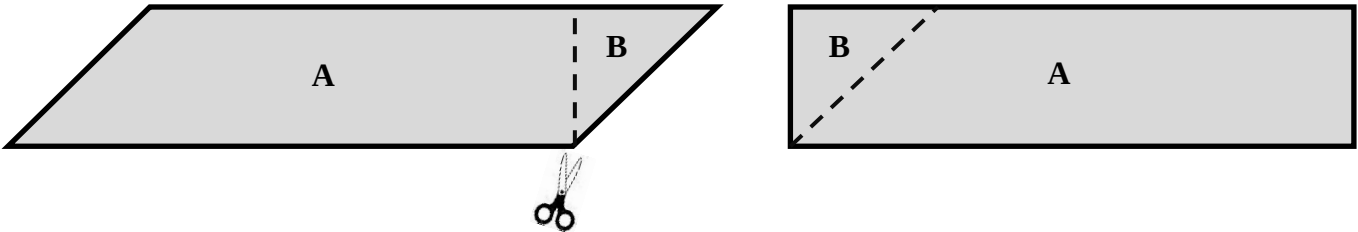
d) ¿Cuál debe ser la diferencia entre el número de canicas de uno y otra para que después del intercambio del día 20 queden ambos con el mismo número? Justifica tu respuesta.

4. PARTIENDO POLÍGONOS

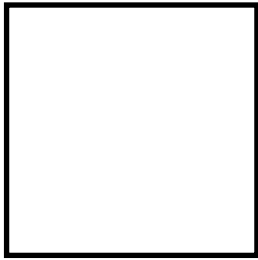
En el siguiente problema vamos a trabajar con polígonos.

Podrás trocearlos (sólo en sentido figurado, ya que no está permitido el uso de tijeras en la prueba) en varias piezas para después poder recomponerlas todas y formar otros polígonos.

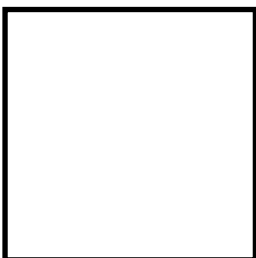
Por ejemplo, un paralelogramo podemos cortarlo en dos piezas y recomponer con ellas un rectángulo:



a) ¿Cuál es el menor número de trozos en que puedes cortar un cuadrado para recomponerlo después en un triángulo? Justifica la respuesta.

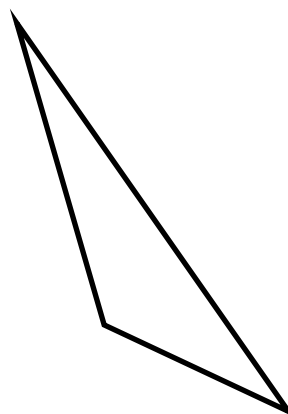
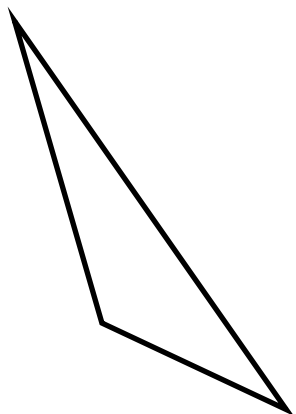


b) ¿Podrías partir un cuadrado en dos piezas para recomponerlas en un triángulo que no tenga ningún ángulo de 45 grados? Justifica la respuesta.

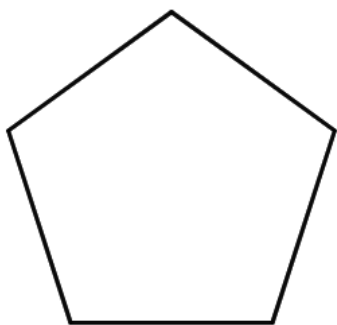


(Continúa detrás)

c) ¿Podrías partir un triángulo escaleno en el número de trozos que necesites para después recomponerlo en un cuadrilátero? ¿Y en un rectángulo?



d) ¿Cómo partirías un pentágono regular en trozos para recomponerlo después en un cuadrilátero?



e) ¿Crees que podrías trocear un triángulo y recomponerlo en un polígono de 18 lados?