

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático



Prueba de selección

2 de junio de 2012

Nombre:.....
Apellidos:.....
Fecha de nacimiento:.....
Teléfonos:.....

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

- A través de tu colegio.
- A través del *Concurso de Primavera*.
- A través de otros medios.

Tienes dos horas y media en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

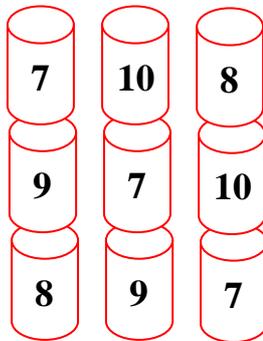
Te deseamos mucho éxito.



1. UNA CASETA DE TIRO EN LA FERIA

En la caseta de tiro de la feria puedes poner a prueba tu precisión lanzando pelotas de tenis. Hay nueve botes, cada uno con un número, apilados como muestra la figura. Y los lanzamientos que efectúes han de cumplir una serie de reglas:

- Dispones de tres lanzamientos
- En cada uno de ellos sólo puedes derribar un bote, sólo uno. Por tanto estás siempre obligado a lanzar a uno de los botes que quedan, tras cada lanzamiento, en la parte superior.
- En el caso de que derribes los tres botes debidamente, esto es, siempre uno de la parte superior, conseguirás como puntuación la suma de lo que indique el bote tumbado en el primer lanzamiento, más el doble de lo que marque el segundo bote, más el triple de lo indique el tercero.



Según la puntuación que obtengas conseguirás un premio u otro.

- ¿Qué puntuación máxima obtendrás si tumbas los tres botes superiores de cada columna?
- En caso de que quieras derribar toda una columna, ¿qué columna conviene derribar para obtener la mayor puntuación?
- Considerando todos los casos posibles, ¿qué puntuación máxima puedes lograr?
- Para conseguir exactamente **50** puntos. ¿Qué botes deberías derribar?

2. ROBOT TRAMOL

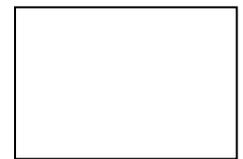


TRAMOL es un robot que puede subir las escaleras. Además en cada paso puede subir o bien un escalón, o bien dos escalones o bien tres escalones. Cuando en un paso sube un escalón decimos que está en modo A; cuando con un paso sube dos escalones decimos que está en modo B y cuando con un paso sube tres escalones decimos que está en modo C. Con el robot nos comunicamos a través de mensajes formados con las letras A, B y C. Si enviamos el mensaje AABC, TRAMOL subirá 7 escalones y lo hará en ese orden: primero dos escalones de uno en uno, luego dos escalones juntos y por último tres escalones a la vez. Si le enviamos el mensaje ABCA, subirá también 7 escalones pero esta forma es distinta de la anterior.

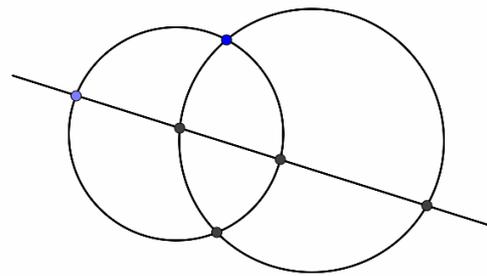


- a) Si tiene que subir 4 escalones, le puedo enviar el mensaje AC, o bien ABA etc. Escribe los distintos mensajes que le puedo enviar. (Recuerda que ABA es distinto de AAB).
- b) Si tiene que subir 6 escalones, ¿le puedo enviar un mensaje en el que la A aparezca exactamente 5 veces?; ¿le puedo enviar un mensaje en el que la A aparezca 4 veces?; ¿le puedo enviar un mensaje en el que no aparezca la A?; ¿Cuántos mensajes hay sin la A? Hay algún mensaje en el que aparezcan la B y la C y no aparezca la A. ¿Porqué?
- c) En total, si tiene que subir 6 escalones ¿cuántos mensajes distintos le puedo enviar?
- d) Si tiene que subir 8 escalones, ¿cuántos mensajes distintos puedo enviar?

3. RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS



En el plano se consideran rectas y circunferencias. En el dibujo ves dos circunferencias y una recta y hay en total seis puntos de intersección.



- ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección que podemos conseguir si dibujamos 3 rectas? ¿Y si dibujamos 4? ¿Y si dibujamos 12?
- ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección que podemos conseguir si dibujamos 3 circunferencias? ¿Y si dibujamos 4? ¿Y si dibujamos 12?
- ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección que podemos conseguir si dibujamos 3 circunferencias y 3 rectas? ¿Y si dibujamos 4 circunferencias y 4 rectas? ¿Y si dibujamos 12 circunferencias y 12 rectas?
- A la vista de lo anterior, ¿podrías describir una fórmula que diera el número máximo de puntos de intersección que se pueden producir cuando se consideran n circunferencias y n rectas en el plano?

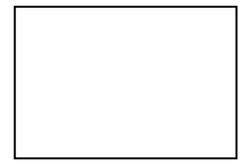
4. SUMA DE NÚMEROS IMPARES



Algunos números se pueden expresar como suma de números positivos impares consecutivos. Por ejemplo $64=31+33$, pero también $64=13+15+17+19$. O por ejemplo $309=101+103+105$.

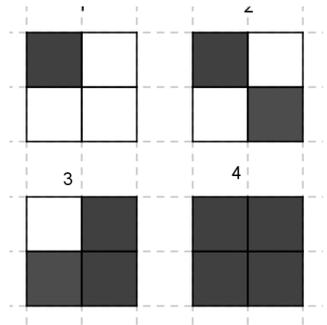
- a) Escribe 120 como suma de números positivos impares consecutivos de dos maneras distintas, explicando cómo lo haces.
- b) Escribe 75 como suma de números positivos impares consecutivos de todas las maneras posibles, explicando cómo lo haces.
- c) ¿Puedes poner 250 como suma de números positivos impares consecutivos? ¿Por qué?
- d) ¿Puedes poner 2009 como suma de números positivos impares consecutivos, y de cuántas maneras puedes hacerlo? ¿Y 2011?
- e) Podrías decir qué números SÍ pueden escribirse como suma de dos números positivos impares consecutivos y qué números NO pueden escribirse de ese modo? Razona tu respuesta.

5. CUADRADOS NEGROS Y BLANCOS

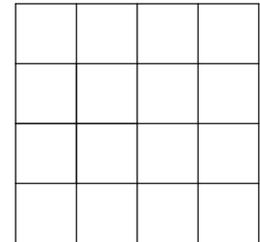


Mira los dibujos de la derecha: son ejemplos de tableros de orden 2, en los que hemos coloreado de negro una, dos, tres y cuatro de sus casillas (cuadrados).

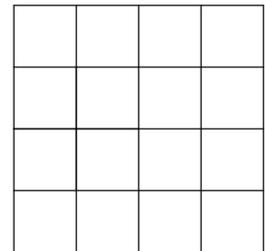
Comprueba que en los tres primeros podemos elegir una fila y una columna tales que, al borrarlas, la única casilla que nos queda es blanca, pero que en el cuarto cualquiera que sea la fila, y cualquiera que sea la columna que borremos, siempre nos queda al final una casilla negra.



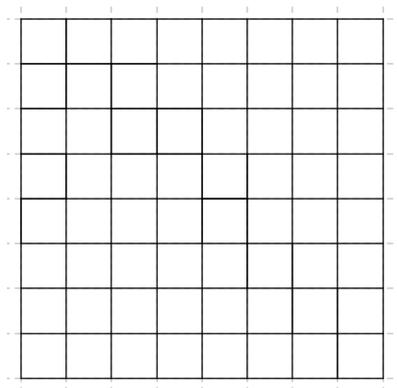
- a) Colorea tú ocho casillas en este tablero de orden 4 de manera que si se borran dos filas y dos columnas **cualesquiera** siempre quede alguna casilla negra.



- b) Ahora colorea siete casillas de manera que si se borran dos filas y dos columnas **cualesquiera** siempre quede alguna casilla negra.



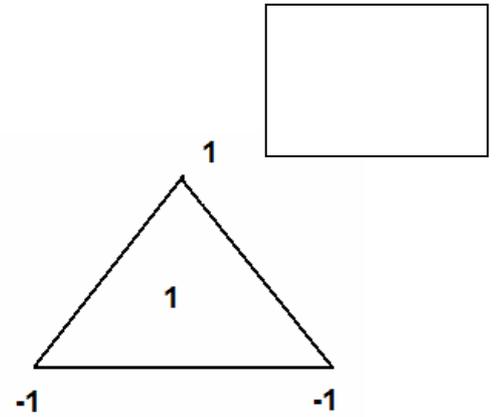
- c) ¿Puedes conseguir lo mismo coloreando únicamente seis casillas? Si la respuesta es sí, explícanos cómo colorea. Si la respuesta es no, justifica por qué no puedes lograrlo.
- d) Mira ahora este tablero de 8. ¿Cuál es el mínimo número de cuadraditos que debes colorear de negro de manera que al borrar CUATRO filas y CUATRO columnas cualesquiera quede siempre algún cuadradito negro?



6. VÉRTICES Y TRIÁNGULOS

En los vértices de un triángulo pones un 1 o un -1 y en el interior del triángulo pones el producto de los números que has puesto en los vértices. Luego sumas todos los números que tienes, los de los vértices y los del interior. En el caso de la figura la suma es

$$-1 -1 +1+1 = 0.$$



- ¿Qué otros valores puede tener esta suma?
- ¿Qué valores puede tener la suma si en lugar de un triángulo comienzas con un cuadrado?
- Si comienzas con un polígono con un número par de vértices ¿puede ser la suma cero? Justifica tu respuesta.
- Si comienzas con un polígono de un número impar de vértices, ¿cuándo puede ser la suma cero? Justifica tu respuesta.