

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
Estímulo del talento matemático



Prueba de selección
11 de junio de 2013

Nombre:.....
Apellidos:.....
Fecha de nacimiento:.....
Teléfonos:.....
Centro de Estudios: e-mail:

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar
DURACIÓN DE LA PRUEBA: 1 HORA Y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir.

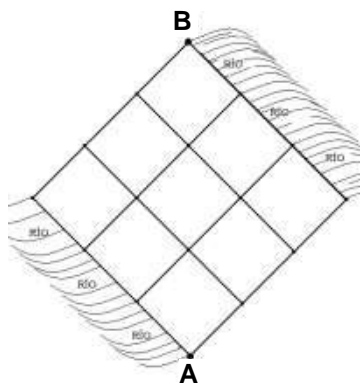
Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Te deseamos mucho éxito.

1. EL PUENTE COLGANTE

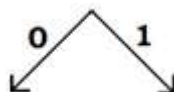
Pablo desea atravesar un puente colgante desde el punto **A** hasta el punto **B**. Para ello puede elegir entre distintos itinerarios indicados en la maqueta según las siguientes reglas:



R1) Únicamente puede pasar por los caminos indicados en la cuadrícula del puente.

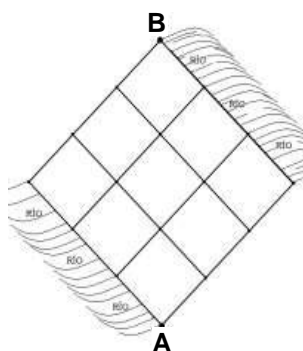
R2) Es un camino siempre “ascendente”, por tanto no puede retroceder en ningún caso.

R3) Se indicará con 0 si elige el camino hacia la izquierda y con 1 si toma el camino de la derecha, como en este dibujo:

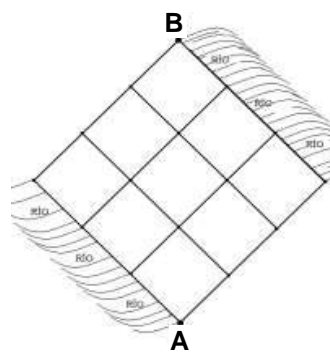


Atendiendo a estas reglas, contesta a las siguientes cuestiones:

a) Dibuja sobre la propia retícula del dibujo los siguientes itinerarios 110010 y 010101.



Itinerario 110010

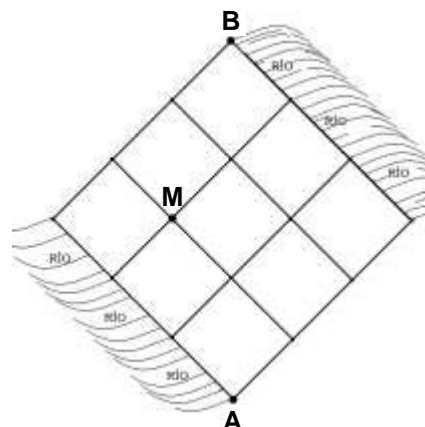


Itinerario 010101

b) Escribe, usando el código de ceros y unos, todos los itinerarios posibles para ir de **A** hasta **B** caminando una sola vez por las orillas del río.

c) Escribe todos los itinerarios posibles para ir de **A** hasta **B** caminando exactamente dos veces por las orillas del río.

d) Si sabemos que Pablo ha pasado por el punto **M**, escribe todos los itinerarios posibles desde el punto **A** hasta el punto **B** pasando por **M**.



2. DEDUCIENDO COMO SHERLOCK-HOLMES

Como puedes ver, en estas tablas hemos colocado en la primera fila y por orden, los números del 1 al 13.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

En la segunda fila has de poner también esos mismos números en cierto orden y en la tercera fila, la suma de los números correspondientes a la primera y a la segunda fila.

Queremos que, en cada uno de los tres casos que te proponemos, trates de ver si es posible o no colocarlos de forma que se cumpla la condición que te indiquemos. Si es posible pon un ejemplo y si no es posible explica por qué.

Caso 1

Suma los números de la primera y de la segunda fila **de forma que todos los resultados que obtengas en la tercera fila sean números pares**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Caso 2

De nuevo, suma los números de la primera y de la segunda fila **de forma que todos los resultados que obtengas en la tercera fila sean números impares**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Caso 3

Análogamente, suma los números de la primera y de la segunda fila **de forma que todos los resultados que obtengas sean números cuadrados perfectos**.

(Recuerda que cuadrados perfectos son los números que se obtienen multiplicando un número por si mismo: por ejemplo 9 y 16 son cuadrados perfectos porque $9 = 3 \times 3$ y $16 = 4 \times 4$).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

3. LA MÁQUINA QUE DA CAMBIO

Una máquina que proporciona cambio, acepta cambiar sólo billetes de 10 €, 20 €, 50 € y 100 €. Funciona de la siguiente manera:

- Un billete de 10 € lo cambia por 2 de 5 €
- Un billete de 20 € lo cambia por 1 de 10 € y 2 de 5 €
- Un billete de 50 € lo cambia por 1 de 20 €, 2 de 10 € y 2 de 5 €
- Un billete de 100 € lo cambia por 1 de 50 €, 1 de 20 €, 2 de 10 € y 2 de 5 €

De entrada, se ponen en la máquina tantos billetes de 5 €, 10 €, 20 € y 50 € como sean necesarios (sin poner ni uno más) para que ésta pueda cambiar exactamente 1000 billetes (sea cual sea el tipo de billete que se quiera cambiar).

- a) ¿Cuántos billetes hay que poner en la máquina (sin poner ni uno más) para estar seguros de poder hacer 1000 operaciones, independientemente del billete que se quiera cambiar? (La máquina solo dispensa billetes que se han introducido antes de empezar a cambiar).
- b) Después de cambiar 200 billetes de 100 €, 40 billetes de 50 € y 100 billetes de 20 €, ¿cuántos billetes de cada clase quedarán al final en la máquina? (Cuenta los que van quedando y los que han entrado)
- c) Hacemos 1000 operaciones de cambio y en la máquina hay 300 billetes de 100 €, 900 de 50 €, 600 de 20 € y 1300 de 10 €. ¿Cuántos billetes de cada clase se han introducido en la máquina en estas 1000 operaciones de cambio?

4. NÚMEROS DE COLORES

Coloreamos cada uno de los números enteros con tres colores, **ROJO**, **VERDE** o **AZUL** de acuerdo con las siguientes reglas:

- I. Todos los números están coloreados
- II. El opuesto de un número ROJO es AZUL y el opuesto de un número AZUL es ROJO. Esto quiere decir que si **4** es AZUL, entonces **-4** es ROJO. Y si **20** fuera ROJO, entonces **-20** sería AZUL.
- III. La suma de dos números AZULES (no necesariamente distintos) debe ser ROJO. Por ejemplo si, como antes, **4** es AZUL, entonces **4+4 = 8** es ROJO. De acuerdo con la regla anterior **-8** será AZUL, y entonces **-20-8 = -28** sería ROJO. (Recuerda que los números enteros pueden ser negativos y que a lo hora de sumar dos enteros hay que tener en cuenta el signo, por ejemplo **3+1=4**; **-2+7=5**, **6-9=-3** y **-8-5=-13**)

a) ¿El 0 puede ser ROJO? ¿De qué color tiene que ser el 0?

b) Vamos a pintar el **1** de AZUL, En este caso, ¿de qué color es el 2?

El 3, ¿puede ser ROJO? ; ¿puede ser AZUL? ¿De qué color tenemos que pintar el 3? Explica claramente tus respuestas.

¿De qué color es el 22? ¿Y el 45? ¿Y el 32?

c) Ahora vamos a pintar el **1 VERDE** y el **2 AZUL**. ¿De qué color es el 4? ¿y el 8?, ¿y el 10? ¿De qué color es el 6? ¿Cómo se colorean todos los números pares?